

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

en vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Paul Sabatier

Spécialité : INFORMATIQUE

par

Pascal MATSAKIS

Relations spatiales structurelles et interprétation d'images

Soutenue le 7 janvier 1998, devant la commission d'examen :

| | | |
|--------------------|---|------------|
| I. BLOCH | Maître de Conférences à l'ENST (Paris) | Rapporteur |
| B. BOUCHON-MEUNIER | Directeur de Recherche au CNRS (Paris) | Examineur |
| S. CASTAN | Professeur de l'Université Paul Sabatier (Toulouse) | Président |
| J.M. CHASSERY | Directeur de Recherche au CNRS (Grenoble) | Examineur |
| J. DESACHY | Professeur de l'Université Paul Sabatier (Toulouse) | Examineur |
| D. DUBOIS | Directeur de Recherche au CNRS (Toulouse) | Examineur |
| M. GRABISCH | Ingénieur à THOMSON-CSF (Orsay) | Rapporteur |
| J.M. PECHINOT | Ingénieur à CRIL <i>Ingenierie</i> (Toulouse) | Examineur |

Un grand merci à Jacky Desachy, qui m'a soutenu, appuyé, fait confiance. Merci à tous ceux qui m'ont donné un petit ou grand coup de main, d'une manière ou d'une autre, à un moment ou un autre, à l'étage X ou à l'étage Y, au bâtiment URV ou ZRT. Merci en particulier à toute l'équipe de traitement d'images.

Merci à Jean-Pierre Madier, qui m'a permis d'intégrer la société *CRIL Ingenierie*. Merci aussi à Jean-Loup Boudineau et Jean-Claude Buselli. Merci enfin à Jean-Marc Péchinot et tous les collaborateurs de l'agence Sud-Ouest.

Le chapitre II ne serait pas aussi complet à ce jour sans l'importante contribution de Laurent Wendling, docteur de l'Université Toulouse III. Il s'est chargé d'implémenter la quasi-totalité des algorithmes concernant la position relative d'objets et a collecté avec beaucoup de patience l'ensemble des résultats expérimentaux. J'ai eu d'autre part avec lui de nombreuses discussions constructives. Je dois aussi beaucoup à Anne-Marie Pocquet, ingénieur à l'IRIT. Sans elle, les représentations pseudo-polaires des F-histogrammes n'auraient pas vu le jour avant le 7 janvier de l'an 2000. Elle m'a rendu par ailleurs d'innombrables services dans les derniers mois de mon doctorat. Serge Andréfouët, thésard au Laboratoire de Géosciences Marines et Télédétection de l'Université Française du Pacifique, m'a initié à la géomorphologie des atolls. Le chapitre III est le fruit d'élucubrations communes à Tahiti, Toulouse, Moorea, Perpignan et Bora-Bora. Merci à Jean-Denis Durou, maître de conférences à l'IRIT. Nous nous sommes rendus coupables d'intéressants bavardages scientifiques. Et il n'a jamais refusé de se creuser la tête sur les petits problèmes que j'avais à lui soumettre. Merci aussi à Michel Claereboudt, chargé de mission à l'ORSTOM, au Centre d'Océanologie de Marseille, pour ses conseils en statistiques. Merci enfin à Louis-Samuel Randriamihamison, maître de conférences à l'Université de Caen, qui a bien voulu se pencher avec moi sur un problème insoluble concernant la recherche de trajectoires optimales.

Un grand merci aux huit personnes (six et deux) qui ont accepté de lire ce document (gratuitement). Merci en particulier à Isabelle Bloch et Michel Grabisch. Sincèrement, je ne voulais pas les faire souffrir autant.

RÉSUMÉ

Dans le domaine de la photo-interprétation automatique, les performances des systèmes de traitement d'images satellites restent limitées. Une amélioration sensible de ces performances passe par la prise en compte de connaissances d'experts et de données exogènes. Nous nous intéressons principalement au problème de l'adéquation entre les objets mis en évidence dans une image et les connaissances structurelles sur les classes auxquelles ces objets sont susceptibles d'être rattachés. Dans quelle mesure par exemple un objet est-il bien situé « dans la direction nord-ouest » de tel autre ? Nous nous focalisons sur les connaissances, à la fois courantes et complexes, faisant intervenir soit la notion de distance entre objets, soit la notion de position relative.

- ➔ À un MNT matriciel il est usuel d'associer un graphe. Nous discutons du problème de la définition de fonctions économiques pour ce type de graphes. Nous introduisons des mesures dites de *rentabilité* et proposons ainsi une modélisation de l'accessibilité : car rentabilité et accessibilité peuvent correspondre de la même manière que coûts et distances. Nous proposons enfin un algorithme performant dédié à la recherche de chemins optimaux dans un graphe associé à un MNT matriciel.
- ➔ L'évaluation des relations directionnelles (« à droite de », « au sud de », etc.) entre deux objets repose généralement sur la constitution d'un histogramme d'angles. Car un tel histogramme est supposé constituer une bonne représentation de la position relative des objets. Nous introduisons un nouveau concept : celui d'*histogramme de forces*. Il permet d'assurer un traitement rapide aussi bien de données vecteurs que rasters, d'objets flous que nets, en tenant compte aussi bien de l'information métrique qu'angulaire.

Supposons maintenant que nous sachions évaluer l'adéquation entre objets et connaissances. Comment utiliser cette aptitude pour mieux classer une image, dès lors que certaines connaissances structurelles sur les classes représentées sont disponibles ? C'est sur ce sujet que nous poursuivrons naturellement nos recherches. En pratique, il s'agira de modifier une partition issue d'une pré-classification floue. Nous concluons le mémoire sur un regard prospectif, en nous demandant si certaines partitions se prêtent mieux que d'autres à ce type de manipulation.

MOTS-CLÉS

classification d'images, relations spatiales,
distances sur un MNT, position relative d'objets, partitions floues

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION **1**
LES POINTS SUR LES i **7**
CHAPITRE I — Distances et accessibilités **15**
coûts et rentabilités

| | |
|---|-----------|
| 1. Introduction | 17 |
| 1.1. Origine de l'étude | 17 |
| 1.2. Analyse d'une proposition | 17 |
| 1.2.1. <i>Calcul de distances sur un MNT</i> | 17 |
| 1.2.2. <i>Une mesure d'accessibilités</i> | 18 |
| 1.3. Présentation de l'étude | 19 |
| 2. Fonctions économiques de l'espace affine euclidien | 20 |
| 2.1. Terminologie et notations | 20 |
| 2.2. Fonctions économiques clino-dépendantes | 21 |
| 2.3. Génératrice d'une fonction économique | 22 |
| 2.4. Fonction énergétique de randonnée | 23 |
| 3. Rentabilité d'un chemin dans l'espace affine euclidien | 24 |
| 3.1. Principe et définition générale | 24 |
| 3.2. Mesures de rentabilité 2D | 25 |
| 3.3. Mesures de rentabilité 3D | 26 |
| 3.4. Mesures de rentabilité 3D isocline | 26 |
| 4. Rentabilité d'un point selon une région, d'une région selon une autre | 27 |
| 4.1. Retour dans l'espace discret | 27 |
| 4.1.1. <i>Rappels et notations</i> | 27 |
| 4.1.2. <i>Graphes, MNT matriciels et fonctions économiques de l'espace</i> | 28 |
| 4.2. Principe et définition générale | 28 |
| 4.3. Mesures de rentabilité 2D | 29 |
| 4.4. Quelques résultats expérimentaux | 30 |
| 5. Calcul des moindres coûts | 32 |
| 5.1. Introduction | 32 |
| 5.2. Formulation générale au moyen d'une relation de préordre | 32 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 5.3. | Cas de l'algorithme de Bellman | 33 |
| 5.4. | Cas de l'algorithme de Dijkstra | 33 |
| 5.5. | L'algorithme des flux et reflux | 34 |
| | 5.5.1. <i>Retournements, flux et reflux</i> | 34 |
| | 5.5.2. <i>Initialisation de l'algorithme</i> | 35 |
| | 5.5.3. <i>Calcul des flux et reflux</i> | 35 |
| | 5.5.4. <i>Remarques</i> | 36 |
| 6. | Conclusion | 37 |

ANNEXES

| | | |
|-----------|--------------------------------------|-----------|
| A. | Démonstrations | 39 |
| B. | Tables de résultats | 47 |

CHAPITRE II — F-histogrammes *concept et applications* **57**

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1. | Introduction | 59 |
| | 1.1. Sur la position relative d'objets 2D | 59 |
| | 1.2. Pour une bonne lecture de ce chapitre | 61 |
| 2. | Présentation sommaire des F-histogrammes | 63 |
| | 2.1. La fonction φ | 64 |
| | 2.2. La fonction f | 64 |
| | 2.3. La fonction F | 65 |
| | 2.4. La fonction F^{AB} | 66 |
| | 2.5. Récapitulatif et exemple | 66 |
| 3. | Développement théorique | 67 |
| | 3.1. De l'évaluation des relations directionnelles vers le traitement des sections longitudinales | 67 |
| | 3.1.1. <i>Relations directionnelles entre points</i> | 68 |
| | 3.1.2. <i>Relations directionnelles entre objets</i> | 68 |
| | 3.1.3. <i>Traitement des sections longitudinales : la fonction F</i> | 71 |
| | 3.2. Du traitement des sections longitudinales au traitement des points, et vice-versa | 73 |
| | 3.2.1. <i>Traitement des segments : la fonction f</i> | 73 |
| | 3.2.2. <i>Traitement des points : la fonction φ</i> | 75 |
| | 3.2.3. <i>Premier récapitulatif</i> | 75 |
| | 3.2.4. <i>Des fonctions φ, f et F particulières : les fonctions φ_r, f_r et F_r</i> | 76 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 3.3. | Du traitement des sections longitudinales à l'évaluation des relations directionnelles | 79 |
| 3.3.1. | <i>Traitement des directions : les F-histogrammes</i> | 79 |
| 3.3.2. | <i>Traitement des F-histogrammes : la fonction H</i> | 79 |
| 3.3.3. | <i>Deuxième récapitulatif</i> | 81 |
| 4. | Aspects pratiques | 82 |
| 4.1. | Calcul de f | 82 |
| 4.1.1. | <i>Fonctions f et classes d'Allen</i> | 82 |
| 4.1.2. | <i>La fonction f_0</i> | 84 |
| 4.1.3. | <i>La fonction f_2</i> | 85 |
| 4.1.4. | <i>La fonction \bar{f}_2</i> | 85 |
| 4.2. | Calcul de F^{AB} | 88 |
| 4.2.1. | <i>Cas d'objets polygonaux</i> | 88 |
| 4.2.2. | <i>Cas de données rasters</i> | 91 |
| 4.3. | Conclusion | 94 |
| 5. | Première étude comparative : histogrammes d'angles et F-histogrammes | 94 |
| 5.1. | Introduction | 94 |
| 5.2. | Outils et méthodes | 95 |
| 5.2.1. | <i>Les méthodes M et Mr</i> | 95 |
| 5.2.2. | <i>Normalisation et distances</i> | 95 |
| 5.2.3. | <i>Images tests et tables comparatives</i> | 95 |
| 5.3. | Résultats | 96 |
| 5.3.1. | <i>Sur la discrétisation de l'ensemble des directions</i> | 96 |
| 5.3.2. | <i>Isotropie et anisotropie</i> | 97 |
| 5.3.3. | <i>Complexité et temps de calcul</i> | 98 |
| 5.3.4. | <i>Versions rasters et versions vecteurs</i> | 100 |
| 5.3.5. | <i>Autres commentaires sur les tables 1 à 6</i> | 100 |
| 5.4. | Conclusion | 101 |
| 6. | Extensions et ouvertures | 102 |
| 6.1. | Sur le traitement d'objets flous | 102 |
| 6.1.1. | <i>Principe</i> | 102 |
| 6.1.2. | <i>Schéma de la double somme (et gravitation universelle)</i> | 102 |
| 6.1.3. | <i>Schéma de la simple somme (et fantaisies de la nature)</i> | 103 |
| 6.1.4. | <i>En conclusion</i> | 104 |
| 6.2. | Vers une prise en compte explicite et modulable de l'information métrique | 104 |
| 6.2.1. | <i>Introduction au problème</i> | 104 |
| 6.2.2. | <i>Des fonctions génératrices de référence : les fonctions φ_r</i> | 105 |
| 6.2.3. | <i>Une application : F_2-histogrammes et objets sécants</i> | 106 |
| 6.3. | Vers une fusion non additive d'informations | 107 |
| 6.3.1. | <i>L'opérateur $*$</i> | 107 |
| 6.3.2. | <i>Exemple</i> | 109 |
| 6.4. | Sur le traitement d'objets convexes | 109 |
| 6.5. | Vers la troisième dimension | 110 |

| | |
|--|------------|
| 7. Génération de relations directionnelles : exemples de fonctions H | 113 |
| 7.1. Les fonctions H_K^μ et H_M^μ | 114 |
| 7.1.1. <i>La fonction H_K^μ</i> | 114 |
| 7.1.2. <i>La fonction H_M^μ</i> | 114 |
| 7.2. La fonction H^μ | 115 |
| 7.2.1. <i>Les forces contradictoires, compensatoires, efficaces</i> | 115 |
| 7.2.2. <i>Les composantes optimales et sous-optimales</i> | 116 |
| 7.2.3. <i>Le seuil h_S</i> | 117 |
| 7.3. Conclusion | 118 |
| 8. Deuxième étude comparative : relations directionnelles | 118 |
| 8.1. Outils et méthodes | 118 |
| 8.1.1. <i>Présentation des images tests et tables comparatives</i> | 118 |
| 8.1.2. <i>Description des différentes méthodes</i> | 119 |
| 8.2. Résultats | 120 |
| 8.2.1. <i>Quelques propriétés discriminantes</i> | 120 |
| 8.2.2. <i>Autres points et caractéristiques</i> | 121 |
| 8.2.3. <i>Derniers commentaires sur les tables 7 à 15</i> | 123 |
| 8.3. Conclusion | 124 |
| 9. Conclusion | 127 |
| ANNEXES | |
| A. Démonstrations | 131 |
| B. Liste des propriétés | 157 |
| C. Tables comparatives | 163 |
| CHAPITRE III — Évaluation et comparaison de partitions en classification d'images | |
| 1. Introduction | 197 |
| 2. Partitions nettes et partitions floues | 198 |
| 2.1. Partitions nettes | 198 |
| 2.2. Partitions floues | 199 |
| 2.2.1. <i>Partitions floues probabilistes</i> | 200 |
| 2.2.2. <i>Partitions floues possibilistes</i> | 200 |
| 2.3. “Défuzzification” d’une partition floue | 201 |

| | |
|--|------------|
| 3. Segmentations fondées sur l'estimation de prototypes | 202 |
| 3.1. Principe | 202 |
| 3.1.1. <i>L'espace des caractéristiques</i> | 202 |
| 3.1.2. <i>Le domaine des prototypes</i> | 202 |
| 3.1.3. <i>La famille de partitions</i> | 203 |
| 3.1.4. <i>La fonction objectif</i> | 203 |
| 3.1.5. <i>La fonction de partition</i> | 203 |
| 3.1.6. <i>La fonction de calcul de prototypes</i> | 203 |
| 3.1.7. <i>La fonction d'arrêt</i> | 204 |
| 3.1.8. <i>Remarques</i> | 204 |
| 3.2. Exemples | 204 |
| 3.2.1. <i>Algorithme FGG</i> | 205 |
| 3.2.2. <i>Algorithme PGK</i> | 205 |
| 3.2.3. <i>Remarque</i> | 206 |
| 4. Évaluation et comparaison de partitions | 206 |
| 4.1. Introduction | 206 |
| 4.2. Considération d'informations binaires | 207 |
| 4.2.1. <i>Confusions présumées et confusions constatées</i> | 207 |
| 4.2.2. <i>Examen des tables 8 et 9</i> | 208 |
| 4.3. Considération d'informations qualitatives | 208 |
| 4.3.1. <i>Classes calculées et classes observées</i> | 208 |
| 4.3.2. <i>Examen des tables 10 et 11</i> | 209 |
| 4.4. Considération d'informations ordinales | 210 |
| 4.4.1. <i>La notion de rang - table 12</i> | 210 |
| 4.4.2. <i>La relation d'interdépendance faible</i> | 211 |
| 4.5. Considération d'informations quantitatives | 212 |
| 4.5.1. <i>La relation d'interdépendance forte</i> | 212 |
| 4.5.2. <i>Plausibilité et crédibilité selon une partition</i> | 213 |
| 4.5.3. <i>Examen de la table 13</i> | 215 |
| 4.5.4. <i>Matrices de plausibilité et de crédibilité - tables 14 et 15</i> | 217 |
| 4.5.5. <i>Imbrications des couches de niveau - table 16</i> | 217 |
| 5. Conclusion | 220 |
| | |
| ANNEXES | |
| A. Démonstrations | 223 |
| B. Tables de résultats | 231 |
| | |
| CONCLUSION | 259 |
| | |
| RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES | 265 |

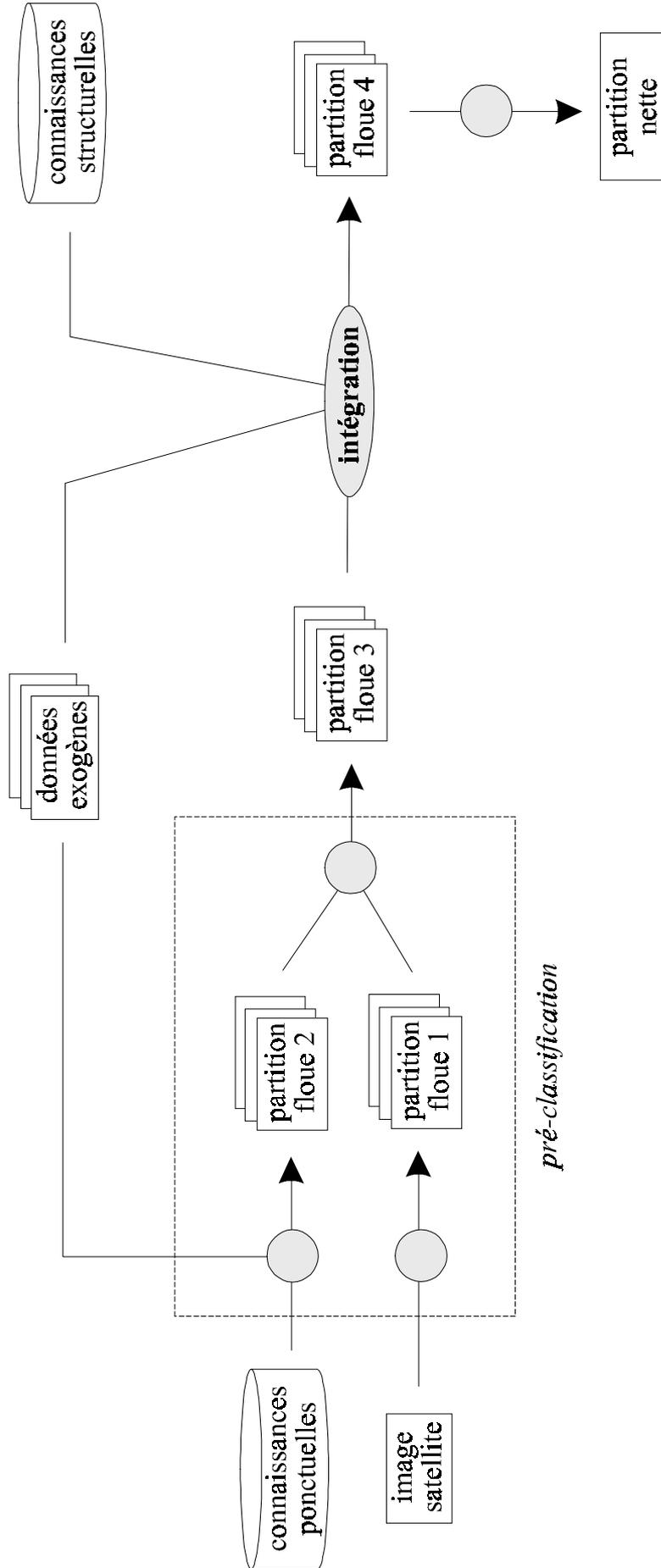
INTRODUCTION

Dans le domaine de la photo-interprétation automatique, les performances des systèmes actuels de traitement d'images satellites restent limitées. Une amélioration sensible de ces performances passe par la prise en compte de connaissances d'experts (écologistes, géologues...) et des nombreuses données exogènes (topographie, sols, routes, rivières, villes, parcellaire...) qui sont souvent disponibles aujourd'hui ou peuvent être extraites de l'image elle-même par des procédés ad hoc. C'est dans notre équipe — équipe *TCI* (Traitement et Compréhension d'Images) de l'*IRIT* (Institut de Recherche en Informatique de Toulouse) — un thème de recherche majeur. À l'issue d'études et analyses diverses ([Desa91](#), [Zahz92](#), [Zeha95](#), [Masc96...](#)), certains choix fondamentaux ont été arrêtés, certains principes posés.

Les connaissances expertes, parce qu'elles peuvent être plus ou moins certaines, précises, sont représentées par des règles de production dont le formalisme est emprunté à la logique floue. Elles se répartissent en deux types génériques : les connaissances dites *ponctuelles* et les connaissances dites *structurelles*. Dans le premier cas, chaque pixel peut être traité indépendamment des autres. « les sapins se trouvent principalement au-dessus de 1000 mètres » constitue un exemple de connaissance ponctuelle. Bien entendu, son exploitation n'est possible que si la donnée exogène « modèle topographique (MNT) de la zone étudiée » est disponible. Dans le cas des connaissances structurelles, les pixels ne peuvent plus être traités indépendamment les uns des autres. « les cocoteraies se présentent presque exclusivement sous la forme de régions allongées », « les sols nus d'un motu sont souvent entourés de végétation » constituent deux exemples de telles connaissances.

Nos recherches portent exclusivement sur l'exploitation de connaissances structurelles. Supposons que nous ayons mis en évidence dans une image, par un moyen quelconque, un certain nombre d'objets. Supposons d'autre part que nous disposions d'un certain nombre de connaissances sur les classes auxquelles nous sommes tentés de rattacher ces objets. Se pose alors *le problème de l'adéquation* entre les objets et les connaissances censées les concerner. Dans quelle mesure par exemple un objet se présente-t-il bien « sous une forme compacte » ? est-il bien situé « dans la direction sud-ouest » de tel autre ? Supposons maintenant que nous sachions évaluer l'adéquation entre objets et connaissances. Comment utiliser cette aptitude pour mieux classifier une image, dès lors que certaines connaissances structurelles sur les classes représentées sont disponibles ? C'est *le problème de l'intégration* des connaissances dans le processus de classification.

Nos travaux concernent principalement le problème de l'adéquation. Les connaissances structurelles expertes sur lesquelles nous nous sommes focalisés sont celles, à la fois courantes et complexes, mettant simultanément en jeu deux classes d'objets. Typiquement, une telle connaissance fait intervenir soit la notion de distance, soit la notion de position relative ([Mats97](#), [Mats98](#)). Le chapitre I porte sur le premier point, le chapitre II — qui constitue véritablement le cœur de ce mémoire — sur le second.



Le problème de l'intégration des connaissances structurelles dans le processus de classification ne peut être véritablement résolu que si le problème de l'adéquation l'est avant lui. Mais il appelle à répondre à bien d'autres questions préliminaires, même si ces questions ne se posent pas avec autant d'évidence. L'objet du troisième et dernier chapitre est d'illustrer ce point. Le processus d'intégration prend en entrée une partition floue. Cette partition est le résultat d'une *pré-classification*, au cours de laquelle sont exploitées données radiométriques et, éventuellement, connaissances ponctuelles. Pour donner un exemple précis, elle peut avoir été engendrée par un classifieur bayésien à lois normales multivariées auquel la responsabilité de la prise de décision a été retirée. La partition floue issue d'une pré-classification associe à tout couple (pixel, classe) un coefficient représentant le degré d'appartenance du pixel à la classe. Un coefficient faible peut correspondre notamment à l'avis suivant : « il est très improbable que ce pixel soit un pixel de la classe ». Et un coefficient élevé : « il est fort probable que ce pixel soit un pixel de la classe ». Prendre en compte les connaissances structurelles, c'est remettre cet avis en question et, éventuellement, le corriger. La tâche du processus d'intégration est donc de *modifier* la partition floue qui lui est présentée (le but étant bien sûr d'améliorer la classification de l'image, c'est-à-dire d'obtenir une partition floue plus en rapport avec la réalité). On peut se demander alors si certaines partitions se prêtent mieux que d'autres, de par leur nature, à ce type de manipulation. Le chapitre III constitue une première réflexion sur ce sujet.

LES POINTS SUR LES i

notations
précisions
rappels

Un dérapage incontrôlé sur des études en mathématiques pures, dans une prime et honteuse jeunesse, nous a laissé de graves séquelles. Nous sommes par exemple beaucoup trop tatillons. Ces premières pages en sont, hélas, une preuve vivante. Le malheureux lecteur pourra se contenter de les lire en diagonale. L'essentiel est de noter leur existence (pour y revenir si besoin) et de se mettre en condition avant d'affronter le gros du mémoire.

Les mathématiciens sont comme les Français. Parlez-leur et ils traduiront immédiatement dans leur propre langage, où cela deviendra immédiatement quelque chose de tout à fait différent.

Goethe

| | | | | | |
|-----------------------|-----|--|-----|-------------------|-----|
| $\emptyset, \{ \}$ | 1.1 | exp | 2.2 | isométrie | 2.3 |
| \leq_a | 2.5 | $f _C$ | 2.5 | ln | 2.2 |
| $ A $ | 1.4 | $f(x_1, \cdot), f(\cdot, x_2), \text{ etc.}$ | 2.4 | max | 3.2 |
| [MN] | 1.3 | $f_1', f_2', f_{12}'', f_{21}'', \text{ etc.}$ | 2.4 | mesure principale | 3.3 |
| $[x, y]$ | 1.2 | fonction | 2 | min | 3.2 |
| $A \times B$ | 1.4 | — à variable réelle | 2.1 | N | 1.1 |
| $a..b$ | 1.2 | — de A dans B | 2.1 | n-uplet | 1.4 |
| $a \equiv b [c]$ | 3.3 | — de A sur B | 2.1 | paire | 1.4 |
| antidéplacement | 2.3 | — de A vers B | 2.1 | permutation | 2.1 |
| application | 2.1 | — définie sur C | 2.1 | projection | 2.3 |
| atan | 2.2 | — définie sur exact... | 2.1 | Q | 1.1 |
| card(A) | 1.4 | — dérivée partielle | 2.4 | R | 1.1 |
| cardinal | 1.4 | — nulle sur C | 2.5 | réflexion | 2.3 |
| coïncidence | 2.5 | — numérique | 2.1 | relation binaire | 3.1 |
| congru | 3.3 | — partielle | 2.4 | — d'équivalence | 3.1 |
| couple | 1.4 | — partout définie | 2.1 | — d'ordre | 3.1 |
| déplacement | 2.3 | — s'annulant sur C | 2.5 | — de préordre | 3.1 |
| dérivée partielle | 2.4 | $\text{Im}(f)$ | 2.1 | restriction | 2.5 |
| développement limité | 2.5 | image (d'un élément) | 2.1 | segment | 1.3 |
| \mathcal{D}_f | 2.1 | image (d'un ensemble) | 2.1 | similitude | 2.3 |
| domaine de définition | 2.1 | image (d'une fonction) | 2.1 | singleton | 1.4 |
| ensemble | 1 | inf | 3.2 | sup | 3.2 |
| — d'arrivée | 2.1 | inférieur à | 3.3 | supérieur à | 3.3 |
| — de départ | 2.1 | infiniment grand | 2.5 | symétrie | 2.3 |
| — fini | 1.4 | intervalle | 1.2 | Z | 1.1 |

1. ensembles

1.1. ensembles usuels

\emptyset et $\{\}$ désignent l'ensemble vide, \mathbf{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, \mathbf{Z} celui des entiers relatifs, \mathbf{Q} celui des rationnels, \mathbf{R} celui des réels. Nous avons : $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbf{Z}_- = \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}^*$, $\mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R} / x > 0\}$, $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, etc.

1.2. intervalles

Soit a et b deux entiers relatifs. $a..b$ dénote l'ensemble $\{n \in \mathbf{Z} / a \leq n \leq b\}$. C'est un *intervalle de \mathbf{Z}* . Si $a..b$ est inclus dans \mathbf{N} c'est aussi un *intervalle de \mathbf{N}* . Soit x et y deux réels. $[x, y]$ dénote l'ensemble $\{t \in \mathbf{R} / x \leq t \leq y\}$, $[x, y[$ l'ensemble $\{t \in \mathbf{R} / x \leq t < y\}$, $] -\infty, y[$ l'ensemble $\{t \in \mathbf{R} / t < y\}$, etc. Ce sont des *intervalles de \mathbf{R}* . Un intervalle de \mathbf{N} , \mathbf{Z} ou \mathbf{R} est *dégénéré* s'il se réduit à l'ensemble vide ou à un singleton.

1.3. segments

Soit M et N deux points d'un espace affine. $[MN]$ désigne le segment dont les extrémités sont M et N . Un segment n'est jamais vide. Un segment est *dégénéré* s'il se réduit à un singleton.

1.4. autres

- Soit A , B et C trois ensembles. Un élément du produit cartésien $A \times B$ est un *couple* (ou *2-uplet*), un élément de $A \times B \times C$ un *triplet* (ou *3-uplet*), etc.
- Un ensemble A est *fini* s'il possède un nombre fini d'éléments : ce nombre, noté $\text{card}(A)$, ou $|A|$, est le *cardinal* de A . Le cardinal de l'ensemble vide est 0, celui d'un *singleton* 1, celui d'une *paire* 2.

2. fonctions

2.1. généralités

- Soit A et B deux ensembles non vides, f une fonction de A vers (ou dans) B . A est l'*ensemble de départ* de f , B son *ensemble d'arrivée*. Le *domaine de définition* de f , noté \mathcal{D}_f , est l'ensemble des points de A en lesquels f est définie. Soit C une partie de A .

« f est partout définie » signifie : $\mathcal{D}_f = A$

« f est définie sur C » signifie : $C \subset \mathcal{D}_f$

« f est définie sur exactement C » signifie : $C = \mathcal{D}_f$

- Soit x un élément de \mathcal{D}_f . $f(x)$ est l'*image de x par f* . Lorsque x décrit $C \cap \mathcal{D}_f$, $f(x)$ décrit l'*image de C par f* , c'est-à-dire $f(C)$. $f(A)$, encore notée $\text{Im}(f)$, est l'*image de f* . « f est une fonction de A sur B » signifie : $f(A) = B$

- Une *application* est une fonction partout définie.

Une *fonction à variable réelle* est une fonction dont l'ensemble de départ est une partie de \mathbf{R} .

Une *fonction numérique* est une fonction dont l'ensemble d'arrivée est une partie de \mathbf{R} .

Une *permutation* d'un ensemble fini non vide E est une bijection de E sur E .

2.2. fonctions numériques usuelles

\ln désigne la fonction logarithme népérien, \exp la fonction exponentielle, \sin la fonction sinus, \cos la fonction cosinus, \tan la fonction tangente, atan la fonction arc tangente, etc.

2.3. fonctions du plan affine

Par « fonction du plan affine » nous entendons « fonction du plan affine vers le plan affine ». En l'absence de précisions, une *projection* est une *projection orthogonale* et une *symétrie* une *symétrie axiale orthogonale* (c'est-à-dire une *réflexion*). Un *déplacement* est une *isométrie positive* (donc une rotation ou une translation), un *antidépacement* une *isométrie négative*. La composée d'une homothétie et d'une isométrie est une *similitude*.

2.4. fonctions partielles et dérivées partielles

Soit f une fonction de \mathbf{R}^2 vers \mathbf{R} et (x_1, x_2) un élément de \mathbf{R}^2 . La *fonction partielle* de \mathbf{R} vers \mathbf{R} qui à tout x associe $f(x_1, x)$ est notée $f(x_1, \cdot)$. Celle qui à tout x associe $f(x, x_2)$ est notée $f(\cdot, x_2)$. Les *fonctions dérivées partielles* (de \mathbf{R}^2 vers \mathbf{R}) sont notées f_1' , f_2' , f_{12}'' , f_{21}'' , etc.

2.5. autres

- Soit A et B deux ensembles non vides, C une partie de A , f et g deux fonctions de A vers B . La *restriction* de f à C est la fonction $f|_C$ de C vers B définie sur exactement $C \cap \mathcal{D}_f$ par : $\forall x \in C \cap \mathcal{D}_f, f|_C(x) = f(x)$. « f et g *coïncident* sur C » signifie : $f|_C = g|_C$
- Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble C .
 « f est *nulle sur* C » signifie : $\forall x \in C, f(x) = 0$
 « f *s'annule sur* C » signifie : $\exists x \in C / f(x) = 0$
- Soit f et g deux fonctions numériques à variable réelle, α un réel, n un entier naturel. Si la fonction g/f admet en α une limite nulle, f est un *infinitement grand* devant g en α : $g(x) \ll_{\alpha} f(x)$
 f admet un *développement limité* à l'ordre n en α s'il existe un polynôme P_n de degré n tel que : $f(x) - P_n(x) \ll_{\alpha} (x - \alpha)^n$

3. autres

3.1. relations binaires

- Soit E un ensemble non vide et \mathcal{R} une relation entre éléments de E (ou *relation binaire* dans E).
- \mathcal{R} est une relation d'*équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive.
 - \mathcal{R} est une relation d'*ordre* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
 - \mathcal{R} est une relation de *préordre* si elle est réflexive et transitive.
 - \mathcal{R} est une relation d'*ordre total* (resp. de *préordre total*) si c'est une relation d'ordre (resp. de préordre) telle que : $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$

3.2. min max sup inf

Soit E une partie de \mathbf{R} .

Si E admet un élément maximal (resp. minimal), cet élément est noté $\max E$ (resp. $\min E$).

Si E admet une borne supérieure (resp. inférieure), cette borne est notée $\sup E$ (resp. $\inf E$).

Si E admet un élément maximal (resp. minimal), il admet une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup E = \max E$ (resp. $\inf E = \min E$). La réciproque est fausse.

3.3. autres

- Soit a , b et c trois réels. a et b sont *congrus modulo* c (ou encore, a est congru à b modulo c) s'il existe un entier relatif k tel que : $a = b + k.c$. On écrit alors : $a \equiv b [c]$
- Dans le plan vectoriel euclidien orienté, l'angle défini par un couple de vecteurs admet une infinité de mesures. Une et une seule de ces mesures appartient à $] -\pi, \pi]$: c'est la *mesure principale* de l'angle.
- On ne confondra pas « soit x et y deux réels » avec « soit x et y deux réels distincts », « x est supérieur à y » ($x \geq y$) avec « x est strictement supérieur à y » ($x > y$), « x est inférieur à y » ($x \leq y$) avec « x est strictement inférieur à y » ($x < y$).
- Pour l'écriture décimale des nombres, nous avons cédé à la pression anglo-saxonne. Ainsi : $3/2 = 1.5$ (et non 1,5).

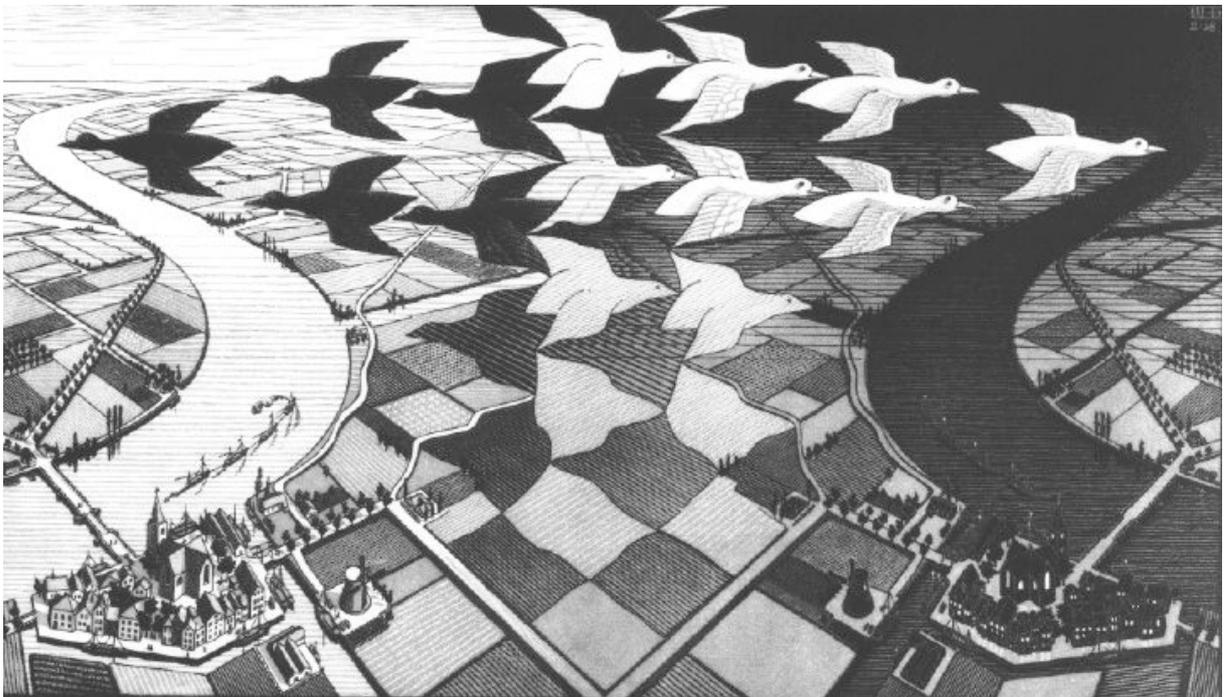
Une dernière précision.

Chaque chapitre est doté d'une annexe A : elle comporte les démonstrations de toutes les propositions énoncées.

Bonne lecture tout de même.

CHAPITRE I

distances rentabilités *et* **coûts accessibilités**



M.C. Escher's "Day and Night" © 1997 Cordon Art - Baarn - Holland. All rights reserved.

1. Introduction

1.1. Origine de l'étude

Le système ICARE (Image CARTographie Expert) est un système dédié à l'interprétation automatique d'images satellites (Desa91, Zahz92, Masc96...). Son domaine d'application privilégié est la classification thématique des images (typiquement, la production de cartes de végétation). Sa spécificité tient à la prise en compte de connaissances d'experts (écologistes, géologues...) et des nombreuses données exogènes (topographie, sols, routes, parcellaire...) qui sont souvent disponibles aujourd'hui ou peuvent être extraites de l'image elle-même par des procédés ad hoc. Une application annexe du système ICARE est la résolution de problèmes thématiques. Saint-Joan développe cet aspect dans le système GEODES (SaJo95).

Lors de l'utilisation effective de tels systèmes, règles ou requêtes appellent fréquemment à rechercher des zones proches du réseau routier, du réseau hydrographique, des agglomérations, des hauts de crêtes ou des fonds de vallées... à rechercher aussi des zones irrigables ou facilement accessibles... Pour rendre possible et efficace ce type de recherche, Zehana propose un algorithme rapide dédié au calcul de distances sur un MNT (Modèle Numérique de Terrain). Il définit aussi une mesure d'accessibilité. Les travaux de Zehana dans ce domaine (Zeha91, Zeha92, Zeha95) sont à l'origine de la présente étude.

1.2. Analyse d'une proposition

Soit I une image numérique, X son support (l'ensemble des pixels de I). On suppose ici que I modélise le relief d'une certaine région du globe. I est donc un MNT matriciel. Et le niveau de gris $I(p)$ d'un pixel p représente une altitude. $\Gamma^+(p)$ dénote l'ensemble des voisins directs de p (4-voisins), $\Gamma^\times(p)$ l'ensemble de ses voisins indirects. On pose d'autre part :

$$\begin{aligned}\Gamma^0(p) &= \{p\} \\ \Gamma^1(p) &= \Gamma^+(p) \cup \Gamma^\times(p) \\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \Gamma^{n+1}(p) &= \{q \in X - \bigcup_{i=0..n} \Gamma^i(p) / \Gamma^1(q) \cap \Gamma^n(p) \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

$\Gamma^n(p)$ est la couronne d'ordre n centrée en p .

$\Gamma^1(p)$, encore notée $\Gamma(p)$, est aussi l'ensemble des 8-voisins de p .

1.2.1. Calcul de distances sur un MNT : l'application d_z

Soit maintenant d_z l'application de X^2 vers \mathbf{R}_+ définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\forall (p,q) \in X^2, q \in \Gamma^0(p) &\Rightarrow d_z(p,q) = 0 \\ \forall (p,q) \in X^2, q \in \Gamma^+(p) &\Rightarrow d_z(p,q) = \sqrt{1 + k^2 [I(p) - I(q)]^2} \\ \forall (p,q) \in X^2, q \in \Gamma^\times(p) &\Rightarrow d_z(p,q) = \sqrt{2 + k^2 [I(p) - I(q)]^2} \\ \forall (p,q) \in X^2, \forall n \in \mathbf{N}^*, q \in \Gamma^{n+1}(p) &\Rightarrow d_z(p,q) = \min_{r \in \Gamma^1(q) \cap \Gamma^n(p)} [d_z(p,r) + d_z(r,q)]\end{aligned}$$

d_z est au cœur de l'algorithme proposé par Zehana. k est une constante strictement positive. Elle sert à la mise en correspondance des unités. Pour calculer l'image d'un couple de pixels voisins, Zehana fait donc appel à la formule de Pythagore. Pour calculer celle d'un couple de pixels non voisins, il s'inspire du schéma algorithmique parallèle utilisé pour la constitution d'une image de distances (plus précisément, il s'agit ici de la distance de l'échiquier, ou distance du chanfrein 1;1) : une onde prend naissance en p et se propage dans I , d'une couronne à l'autre (📖 *Rose66*, 📖 *Borg84*). L'algorithme proposé est effectivement très rapide (le calcul de distances sur I s'opère en deux balayages de l'image). Mais généralement — c'est-à-dire sauf propriétés particulières du MNT — d_z n'est pas une distance. Comme le suggère la figure 1, l'inégalité triangulaire peut ne pas être vérifiée. De plus, alors qu'entre deux pixels situés sur une même ligne ou colonne les plus courts chemins sont dépendants du MNT, entre deux pixels situés sur une même diagonale les plus courts chemins sont indépendants du MNT. L'application d_z ne peut donc pas se voir décerner le titre de « distance géodésique discrète » auquel elle prétend implicitement. Notons que d'autres applications ont été proposées dans la littérature et méritent effectivement ce titre. Celle définie par le biais de l'algorithme WDTACS en est un exemple ("Weighted Distance Transform On Curved Space", 📖 *Toiv96*) : mais le calcul des distances s'appuie sur un schéma algorithmique classique (📖 *Bell58*, §5.3) et nécessite de nombreux balayages de l'image (couramment, de plusieurs dizaines à une bonne centaine).

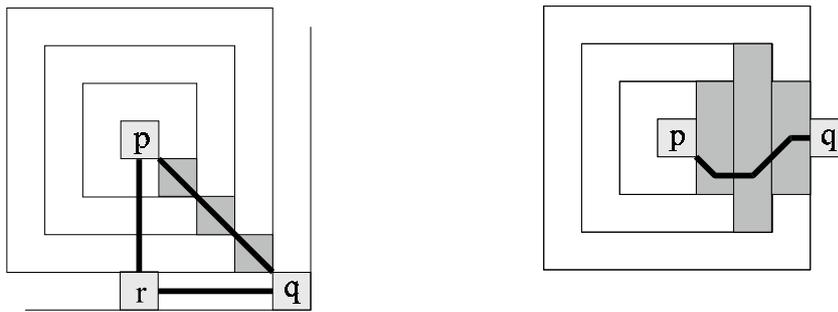


figure 1. La « distance » d_z .

Les pixels concernés par la recherche d'un plus court chemin entre p et q sont représentés en gris foncé. Dans le premier cas, à gauche, il existe un et un seul plus court chemin : son tracé est indépendant du MNT. Si la zone de recherche correspond à une région accidentée, on peut avoir : $d_z(p,r)+d_z(r,q)<d_z(p,q)$

1.2.2. Une mesure d'accessibilités : l'application a_z

Zehana définit l'accessibilité $a_z(p,q)$ entre deux pixels p et q par la différence $d_z(p,q)-d(p,q)$, où d désigne « une distance plane ». Depuis p , l'accès à q est jugé d'autant plus facile que $a_z(p,q)$ est proche de 0, d'autant plus difficile que $a_z(p,q)$ est grand. Le choix de d n'est pas précisé. Ce choix est pourtant capital. Supposons par exemple que d soit la distance de l'échiquier. Dans le cas de voisins indirects p et q tels que $I(p)=I(q)$ nous avons alors $a_z(p,q)\neq 0$: depuis p , l'accès à q n'est pas jugé des plus faciles ! Autre remarque, plus fondamentale : exprimer l'accessibilité par une différence est source d'incohérences, comme le suggère la figure 2.

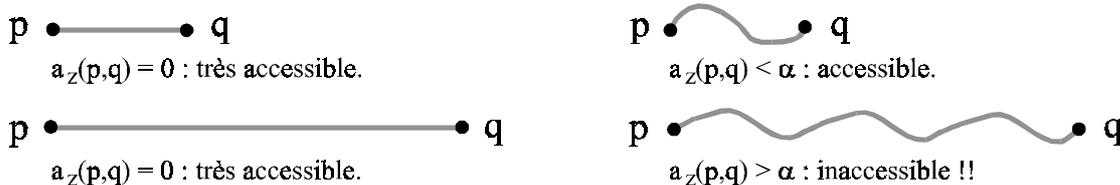


figure 2. La mesure d'accessibilité a_z .

1.3. Présentation de l'étude

La proposition précédente souffre donc de nombreuses faiblesses. L'objet du chapitre est de dégager les idées maîtresses de cette proposition et de les explorer. Lorsqu'il est nécessaire de superposer différentes strates de données à une image satellite (une opération couramment effectuée par les systèmes experts tels que ICARE), la représentation matricielle des MNT est généralement préférée à la représentation par courbes de niveaux ou par facettes triangulaires. Elle autorise en effet un accès immédiat à l'information ( Megz84). Nous nous intéressons par conséquent aux MNT matriciels, et plus précisément aux graphes orientés et valués qui peuvent être définis à partir de ces MNT.

Typiquement, dans un tel graphe, le coût d'un chemin optimal correspond à la distance minimale que doit parcourir un véhicule tout-terrain pour rallier un point précis depuis une région donnée (« moindre coût » doit donc être rapproché de « distance géodésique », et « chemin optimal » de « géodésique minimale »). Ce coût peut aussi correspondre au temps minimal nécessaire pour effectuer le déplacement, ou encore à la quantité minimale de carburant dont il faut disposer, etc. Dans un cadre général et formel, nous discutons §2 du problème de la définition de fonctions économiques. La démarche adoptée va de la géométrie euclidienne vers la géométrie discrète. Nous introduisons ainsi des fonctions économiques définies sur des chemins de l'espace affine euclidien et associées à des espaces physiques idéaux. Ces fonctions, pour lesquelles nous proposons un mode de construction particulièrement simple et naturel, sont aux fonctions économiques de graphe ce qu'est une surface au MNT matriciel qui la représente.

Elles nous permettent d'introduire des mesures dites de *rentabilité*. « rentabilité » est un terme générique, au même titre que « coût ». Dans certains contextes, notamment si le MNT modélise le relief d'une région du globe (un MNT peut aussi modéliser une densité de population, un taux de radioactivité, etc.), on préférera parler d'*accessibilité*. Car la rentabilité est au coût ce que l'accessibilité est à la distance, et rentabilité et accessibilité peuvent correspondre de la même manière que coûts et distances. Il est habituel de dire que tel endroit est proche et facilement accessible, ou proche mais inaccessible, distant mais tout à fait accessible, etc. : la complémentarité des informations de distance et accessibilité, de coût et rentabilité, est indubitable. Dans le paragraphe §3, nous montrons comment évaluer la rentabilité (ou l'accessibilité) d'un chemin. Et dans le paragraphe §4 comment évaluer la rentabilité d'un point selon une région (ou l'accessibilité d'un point depuis une région). Cette aptitude peut être exploitée par des systèmes experts spécialisés, comme ICARE et GEODES, dans la classification automatique d'images satellites ou la résolution de problèmes d'aménagement régional.

Nous nous penchons enfin §5 sur le calcul des moindres coûts. Les algorithmes habituellement utilisés sont ceux, très généraux, de Bellman ( Bell58) et Dijkstra ( Dijk59). Nous les présentons brièvement, en les inscrivant dans un cadre commun dont nous nous servons pour introduire un nouvel algorithme : *l'algorithme des flux et reflux*. Dédié à la recherche de chemins optimaux dans un graphe orienté, valué, associé à un MNT matriciel, il permet un calcul rapide et croisé de l'image des moindres coûts et de celle des rentabilités.

2. Fonctions économiques de l'espace affine euclidien

Après avoir fixé terminologie et notations §2.1, nous décrivons §2.2 les fonctions économiques auxquelles se réfère notre étude, fonctions qui sont associées à des espaces physiques idéaux. Nous montrons ensuite §2.3 comment la notion de génératrice permet de répondre, d'une façon particulièrement simple et naturelle, au problème de la définition de ces fonctions économiques. C'est enfin sur une famille typique de génératrices que porte le paragraphe §2.4.

2.1. Terminologie et notations

L'espace est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan est le sous-espace affine rapporté au repère direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Un chemin est un arc géométrique de l'espace. La longueur d'un chemin est sa longueur euclidienne. Un chemin linéaire est un chemin de l'espace, orienté, sans point double, dont le support est un segment. $\overline{P_1P_2}$, où P_1 et P_2 sont deux points de l'espace, désigne le chemin linéaire d'origine P_1 et d'extrémité P_2 . Soit n un entier supérieur ou égal à 3, $(P_i)_{i \in 1..n}$ une suite de n points de l'espace. $\overline{P_i}^{i \in 1..n}$ dénote le chemin orienté obtenu par juxtaposition des arcs $\overline{P_i}^{i \in 1..n-1}$ et $\overline{P_{n-1}P_n}$. Si P_2 appartient au segment $[P_1P_3]$ nous avons donc : $\overline{P_1P_2P_3} = \overline{P_1P_3}$. D'autre part, la longueur du chemin $\overline{P_i}^{i \in 1..n}$ est $\sum_{i \in 1..n-1} P_iP_{i+1}$.

Considérons maintenant l'ensemble des chemins bénéficiant de la notation récurrente que nous venons d'introduire. \mathcal{C} désigne la partie de cet ensemble constituée des seuls chemins $\overline{P_i}^{i \in 1..n}$ tels que : pour tout élément i de $1..n-1$, les projetés orthogonaux de P_i et P_{i+1} sur le plan sont distincts. Nous réservons désormais le terme de chemin aux éléments de \mathcal{C} .

Soit \overline{PQ} un chemin de \mathcal{C} (plus exactement, « soit P et Q deux points de l'espace tels que : $\overline{PQ} \in \mathcal{C}$ »). Trois valeurs lui sont couramment associées (fig.3) : $\angle_{\overline{PQ}}$, $x_{\overline{PQ}}$, $y_{\overline{PQ}}$. Formellement, soit \vec{u} le projeté orthogonal de \overline{PQ} sur le plan (\vec{i}, \vec{j}) et soit \vec{v} le vecteur unitaire $\vec{u} / |\vec{u}|$. Plaçons-nous dans le plan vectoriel direct (\vec{v}, \vec{k}) : $\angle_{\overline{PQ}}$ dénote la mesure principale de l'angle orienté défini par le couple (\vec{v}, \overline{PQ}) , $x_{\overline{PQ}}$ dénote l'abscisse de \overline{PQ} , $y_{\overline{PQ}}$ son ordonnée. Nous avons : $\angle_{\overline{PQ}} \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $x_{\overline{PQ}} \in \mathbf{R}_+^*$ et $y_{\overline{PQ}} / x_{\overline{PQ}} = \tan(\angle_{\overline{PQ}})$. $\angle_{\overline{PQ}}$ mesure l'angle que fait le chemin linéaire \overline{PQ} avec le plan. C'est la pente du chemin.

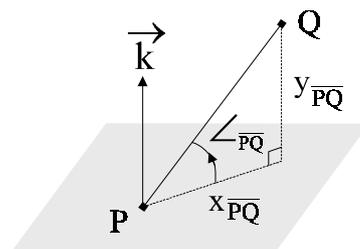


figure 3. Chemins linéaires de \mathcal{C} .

2.2. Fonctions économiques clino-dépendantes

Définition 1.

Nous appellerons *fonction économique de l'espace* toute application C de \mathcal{E} vers $\bar{\mathbf{R}}_+^*$ satisfaisant à la propriété suivante :

[A1] Soit $\bar{P}_i^{i \in \{1..n\}}$ un chemin de \mathcal{E} : $C(\bar{P}_i^{i \in \{1..n\}}) = \sum_{i \in \{1..n-1\}} C(\overline{P_i P_{i+1}})$

Soit μ un chemin de \mathcal{E} . $C(\mu)$ est le *coût* de μ (relativement à C).

Si $C(\mu)$ est fini, μ est dit *potentiellement rentable*.

Tout chemin de \mathcal{E} admet donc un coût (C est une application) et peut n'être absolument pas rentable (un coût peut être infini). D'autre part, se déplacer est toujours coûteux (un coût est strictement positif). Notons que certains problèmes de chemins optimaux appellent à remplacer le calcul de la somme (dans [A1]) par celui du minimum ([Gond84](#)) ou de la moyenne ([Ahu93](#)), voire du produit ([Prin94](#)). Et il peut s'agir alors de rechercher non plus des chemins de coût minimal mais des chemins de coût maximal. La définition précédente est néanmoins adaptée à la grande majorité des problèmes qui sont pratiquement rencontrés.

Définition 2.

Nous dirons d'une fonction économique C de l'espace qu'elle est *clino-dépendante* si et seulement si elle satisfait à la propriété suivante :

[A2] Soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{E} : $[PQ = RS \text{ et } \angle_{\overline{PQ}} = \angle_{\overline{RS}}] \Rightarrow C(\overline{PQ}) = C(\overline{RS})$

La pente et la longueur d'un chemin linéaire déterminent donc le coût de celui-ci. Autrement dit, la localisation exacte du chemin dans l'espace n'a pas d'importance : l'espace est considéré *homogène*. En pratique bien sûr, c'est loin d'être toujours le cas : un déplacement peut se faire sur route ou sur terrain accidenté, dans le sens du vent ou contre le vent, sur sol sec ou détrempé, au travers d'une végétation dense ou clairsemée, etc. Différents auteurs s'attachent à prendre en compte dans le calcul des coûts l'un ou l'autre de ces facteurs ([Mitt91](#), [Zhan93](#), [Krev94](#), [Dubo95...](#)). Quoi qu'il en soit, les fonctions économiques clino-dépendantes sont des fonctions fondamentales. Car on ne peut tirer aucun avantage d'une fonction économique associée à un espace non homogène si les données exogènes disponibles se réduisent aux seules données topographiques. D'autre part, il est souvent possible de définir une telle fonction à partir d'une famille paramétrée de fonctions clino-dépendantes (l'une modélisant par exemple le déplacement sur route goudronnée, l'autre sur chemin rocailleux, etc.). Enfin, comme nous le verrons §3, la notion subjective de rentabilité repose sur la faculté de concevoir des fonctions économiques idéales.

La proposition 1 découle de [A1] et [A2]. Elle exprime que le coût d'un chemin linéaire de pente donnée est proportionnel à la longueur de ce chemin (fig.5a). Nous ne pourrions clore ce paragraphe §2.2 sans donner un exemple type de fonction clino-dépendante : l'application de \mathcal{E} vers $\bar{\mathbf{R}}_+^*$ qui à tout chemin associe sa longueur.

Proposition 1.

Soit C une fonction économique clino-dépendante, \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{E} , k un réel strictement positif : $[PQ = k.RS \text{ et } \angle_{\overline{PQ}} = \angle_{\overline{RS}}] \Rightarrow C(\overline{PQ}) = k.C(\overline{RS})$

2.3. Génératrice d'une fonction économique

Définition 3.

Soit θ un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$ et soit C une fonction économique clino-dépendante de l'espace. Nous dirons de C qu'elle est *minimale en θ* si et seulement si elle satisfait aux propriétés suivantes :

[A3] Soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{C} : ($PQ = RS$ et $\angle_{\overline{RS}} = \theta$) $\Rightarrow C(\overline{PQ}) \geq C(\overline{RS})$

[A4] Soit \overline{RS} un chemin de \mathcal{C} : [$RS = 1$ et $\angle_{\overline{RS}} = \theta$] $\Rightarrow C(\overline{RS}) = 1$

De [A3] il découle que parmi tous les chemins linéaires de longueur 1, ceux de pente θ ont le moindre coût. [A4] fixe ce coût minimal à 1. Le seul apport véritable de [A4] est de garantir l'existence de chemins potentiellement rentables. Remarquons que l'application de \mathcal{C} vers \mathbf{R}_+^* qui à tout chemin associe sa longueur est minimale en tout élément de $]-\pi/2, \pi/2[$.

Proposition 2.

\Rightarrow Soit θ un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$ et soit C une fonction économique clino-dépendante de l'espace. Si C est minimale en θ , il existe une application δ de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $[0, 1]$ telle que pour tout chemin \overline{PQ} de \mathcal{C} :

$$C(\overline{PQ}) = \frac{x_{\overline{PQ}}}{\cos(\angle_{\overline{PQ}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{PQ}})}$$

Cette application δ est unique et vaut 1 en θ .

\Leftarrow Soit θ un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$ et δ une application de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $[0, 1]$ valant 1 en θ . Il existe une fonction économique C de l'espace telle que pour tout chemin \overline{PQ} de \mathcal{C} :

$$C(\overline{PQ}) = \frac{x_{\overline{PQ}}}{\cos(\angle_{\overline{PQ}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{PQ}})}$$

Cette fonction économique est unique, clino-dépendante et minimale en θ .

Définition 4.

Soit θ un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$. D'après la proposition 2, la donnée d'une fonction économique clino-dépendante minimale en θ équivaut à celle d'une application δ de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $[0, 1]$ valant 1 en θ : δ est la *génératrice* de la fonction économique.

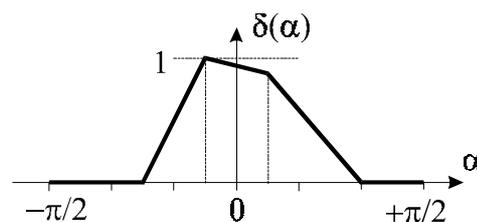


figure 4. Génération d'une fonction économique.

C'est sur les pentes de 15° que le randonneur est le plus à l'aise. Il refuse de grimper des côtes à plus de 60° ou de dévaler des pentes à plus de 45° .

$\delta(\alpha)$, pour tout élément α de $]-\pi/2, \pi/2[$, est la distance qu'une unité de coût permet de franchir sur un chemin linéaire de pente α . C'est dans la simplicité de cette interprétation que réside l'intérêt d'exprimer C en fonction de δ . D'un point de vue pratique, définir une fonction économique par l'intermédiaire de sa génératrice est particulièrement commode et naturel (fig.4).

2.4. Fonction énergétique de randonnée

Définition 5.

Soit θ un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$ et soit C une fonction économique de l'espace, clino-dépendante et minimale en θ . Nous dirons de C que c'est une *fonction énergétique de randonnée* si et seulement si elle satisfait à la propriété suivante :

[A5] Soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{E} :

$$[PQ = RS \text{ et } (\angle_{\overline{PQ}} \leq \angle_{\overline{RS}} \leq \theta \text{ ou } \theta \leq \angle_{\overline{RS}} \leq \angle_{\overline{PQ}})] \Rightarrow C(\overline{PQ}) \geq C(\overline{RS})$$

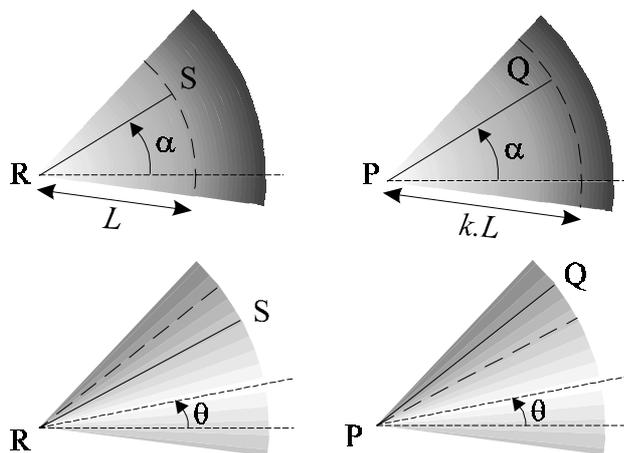


figure 5. Propriétés d'une fonction énergétique de randonnée.

Le coût est d'autant plus élevé que le gris est foncé.

a) En haut (proposition 1) : $C(\overline{PQ}) = k.C(\overline{RS})$

b) En bas ([A5]) : $C(\overline{PQ}) \geq C(\overline{RS})$

Proposition 3.

Soit θ un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$ et soit δ une application de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $[0,1]$ valant 1 en θ . La fonction économique C générée par δ est une fonction énergétique de randonnée si et seulement si δ est croissante sur $]-\pi/2, \theta[$ et décroissante sur $]\theta, \pi/2[$.

$\delta(\alpha)$, pour tout élément α de $]-\pi/2, \pi/2[$, correspond à la distance que le randonneur, en brûlant une unité d'énergie, peut franchir sur un chemin linéaire de pente α . D'après [A5], c'est sur un chemin linéaire de pente θ que le randonneur se fatigue le moins. Plus la pente du chemin s'écarte de θ (plus la côte est raide ou la descente rapide) et plus le randonneur doit se dépenser. L'idée est bien sûr de pouvoir pénaliser les itinéraires abrupts. La proposition 1 et cette propriété de la fonction énergétique sont illustrées par la figure 5. La proposition 1 peut être réinterprétée ici en disant que l'énergie dépensée par le randonneur sur un chemin linéaire donné est proportionnelle à la distance parcourue. Remarquons que si δ est paire, le coût d'un

chemin ne dépend pas de son orientation : le randonneur ne fait pas de distinction entre côtes et descentes. C'est le cas par exemple lorsque la fonction énergétique de randonnée est celle qui à tout chemin associe sa longueur. Les fonctions énergétiques de randonnée sont les fonctions économiques clino-dépendantes les plus « naturelles ». L'application δ représentée par la figure 4 génère bien sûr une telle fonction.

3. Rentabilité d'un chemin dans l'espace affine euclidien

3.1. Principe et définition générale

Dans le langage courant, la notion abstraite de rentabilité est indissociable de la notion souvent concrète de coût. Voici la définition très générale d'une mesure de rentabilité sur les chemins de l'espace affine euclidien.

Définition 6.

Soit C_r et C_i deux fonctions économiques de l'espace (clino-dépendantes ou non) et soit \mathcal{A} une application de \mathcal{C} vers l'ensemble des parties de \mathcal{C} . La *mesure de rentabilité* A associée au triplet (C_r, C_i, \mathcal{A}) est une fonction de \mathcal{C} vers $[0,1]$. Soit μ un chemin de \mathcal{C} . A n'est définie en μ que si l'une au moins des valeurs $\inf_{v \in \mathcal{A}(\mu)} C_i(v)$ et $C_r(\mu)$ est finie. Auquel cas :

$$A(\mu) = \min \{1, [\inf_{v \in \mathcal{A}(\mu)} C_i(v)] / C_r(\mu)\}$$

$A(\mu)$ est la *rentabilité* de μ — relativement à (C_r, C_i, \mathcal{A}) .

- ⇒ μ est considéré comme le moyen adopté pour atteindre un certain but \mathcal{Z}
- ⇒ $\mathcal{A}(\mu)$ constitue l'ensemble des moyens qui a priori permettent d'atteindre \mathcal{Z}
- ⇒ $C_i(v)$ est le prix qu'a priori il faut payer pour atteindre \mathcal{Z} au moyen de v .
- ⇒ $\inf_{v \in \mathcal{A}(\mu)} C_i(v)$ est le prix idéal : celui qu'a priori il suffit de payer pour atteindre \mathcal{Z} .
- ⇒ enfin, $C_r(\mu)$ est le prix réel : celui qu'il faudra effectivement payer pour atteindre \mathcal{Z} .

La rentabilité $A(\mu)$ de μ est donc tout simplement le quotient du coût idéal par le coût réel. Elle est fortement dépendante d'un ensemble de connaissances a priori (représenté par \mathcal{A} et C_i). Elle est maximale ($A(\mu) = 1$) lorsque le coût réel est fini et inférieur ou égal au coût idéal, c'est-à-dire à tout ce qui avait pu être « raisonnablement » imaginé. Elle est minimale ($A(\mu) = 0$) lorsqu'il semble possible d'atteindre \mathcal{Z} sans contrepartie ($\inf_{v \in \mathcal{A}(\mu)} C_i(v) = 0$), ce qui est illusoire, ou lorsque le coût réel est infini alors qu'il semblait possible d'atteindre \mathcal{Z} ($\inf_{v \in \mathcal{A}(\mu)} C_i(v) \neq +\infty$). Ajoutons que si μ est potentiellement rentable relativement à C_r alors A est définie en μ . D'autre part, si $\mathcal{A}(\mu)$ est la partie vide de \mathcal{C} , c'est qu'a priori il n'y a aucun moyen d'atteindre \mathcal{Z} : par convention (et c'est la convention classique) $\inf_{v \in \mathcal{A}(\mu)} C_i(v)$ est infini ($+\infty$).

La seule contrainte réelle concernant le but \mathcal{Z} est qu'il soit atteint par μ . Ainsi, « parcourir une certaine distance (la longueur de μ) » est un but possible. Typiquement bien sûr, ce sera plutôt « rejoindre un point (l'extrémité de μ) depuis un autre (l'origine de μ) ».

Avoir une connaissance parfaite du monde c'est s'attendre à payer ce qu'il faudra effectivement payer : C_i est l'application C_r et \mathcal{A} associe $\{\mu\}$ à tout chemin μ de \mathcal{C} . « μ est potentiellement rentable (relativement à C_i ou C_r) », « A est définie en μ », « μ est absolument rentable ($A(\mu) = 1$) » sont alors trois propositions équivalentes. Une mesure de rentabilité ne présente donc d'intérêt que si les connaissances mises en jeu sont limitées. En général, C_i sera choisie clino-dépendante : croire l'espace homogène, c'est bien avoir une vision incomplète (idéaliste) du monde. Rien n'empêche d'ailleurs de choisir C_i et C_r toutes deux clino-dépendantes : typiquement, cela correspond au cas où seules les données topographiques sont disponibles (ou prises en compte). Il est même possible d'opter pour l'égalité : n'avoir à manipuler qu'une seule fonction économique est évidemment appréciable d'un point de vue pratique. Dans les paragraphes §3.2 à §3.4, nous décrivons brièvement trois familles de semblables mesures.

Soit P et Q deux points quelconques de l'espace. Nous notons \mathcal{D}_P et \mathcal{D}_Q les droites dirigées par \vec{k} et passant respectivement par P et Q , $P \sim Q$ l'ensemble des chemins de \mathcal{C} allant de P vers Q et $\mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q$ l'ensemble des chemins de \mathcal{C} allant d'un point de \mathcal{D}_P vers un point de \mathcal{D}_Q :

$$\mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q = \bigcup_{(P',Q') \in \mathcal{D}_P \times \mathcal{D}_Q} P' \sim Q'$$

3.2. Mesures de rentabilité 2D

Définition 7.

Soit C une fonction économique clino-dépendante de l'espace. Soit d'autre part \mathcal{A} l'application de \mathcal{C} vers l'ensemble des parties de \mathcal{C} qui à tout chemin μ fait correspondre $\mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q$, où P désigne l'origine de μ et Q son extrémité. La *mesure de rentabilité 2D associée à C* est la mesure de rentabilité A^{2D} associée au triplet $(C, \mathcal{C}, \mathcal{A})$. Soit μ un chemin de \mathcal{C} en lequel A^{2D} est définie : $A^{2D}(\mu)$ est la *rentabilité 2D de μ* — relativement à C .

Proposition 4.

Soit C une fonction économique clino-dépendante de l'espace et soit A^{2D} la mesure de rentabilité 2D associée à C . Soit d'autre part μ un chemin de \mathcal{C} , P son origine, Q son extrémité. Si A^{2D} est définie en μ elle l'est sur $P \sim Q$. De plus, pour tout chemin v de $P \sim Q$:

$$[C(v)=C(\mu) \Leftrightarrow A^{2D}(v)=A^{2D}(\mu)] \text{ et } [C(v)>C(\mu) \Leftrightarrow A^{2D}(v)<A^{2D}(\mu)]$$

Autrement dit, la rentabilité 2D d'un chemin de $P \sim Q$ ne dépend que du coût de ce chemin et est d'autant plus grande que ce coût est faible.

Prévoir de dépenser $\inf_{v \in \mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q} C(v)$ pour rejoindre Q à partir de P , c'est être à la fois économique, pragmatique, très optimiste et (vraiment) mal renseigné. Comme si un randonneur, pour estimer la distance qu'il lui reste à parcourir, traçait un segment sur une carte touristique rudimentaire en se disant que le relief est certainement tel qu'il l'espère. La mesure A^{2D} est ainsi faite. Et cela rend ses jugements sévères : si l'on conseille de suivre μ à une personne voulant rejoindre Q à partir de P , A^{2D} estimera probablement, en comparant $C(\mu)$ au coût initialement prévu, que la suggestion n'est pas des meilleures (sinon des plus honnêtes). Lorsque C est l'application de \mathcal{C} vers $\bar{\mathbf{R}}_+^*$ qui à tout chemin associe sa longueur, le coût prévu est la distance

entre les droites \mathcal{D}_P et \mathcal{D}_Q , c'est-à-dire $x_{\overline{PQ}}$. La mesure A^{2D} est donc partout définie et la valeur $A^{2D}(\mu)$ est tout simplement $x_{\overline{PQ}}/\lambda$ — en désignant par λ la longueur de μ . La proposition suivante nous donne le moyen pratique de caractériser A^{2D} dans un cas plus général.

Proposition 5.

Soit C la fonction économique générée par une application δ continue. La mesure de rentabilité A^{2D} associée à C est partout définie. De plus, pour tout couple (P, Q) de points de l'espace, si \overline{PQ} est un chemin de \mathcal{C} alors :

$$\inf_{v \in \mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q} C(v) = x_{\overline{PQ}} / \max_{\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[} (\delta(\alpha) \cdot \cos(\alpha))$$

Sinon : $\inf_{v \in \mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q} C(v) = 0$

3.3. Mesures de rentabilité 3D

Définition 8.

Soit C une fonction économique clino-dépendante de l'espace. Soit d'autre part \mathcal{A} l'application de \mathcal{C} vers l'ensemble des parties de \mathcal{C} qui à tout chemin μ fait correspondre $P \sim Q$, où P désigne l'origine de μ et Q son extrémité. La *mesure de rentabilité 3D associée à C* est la mesure de rentabilité A^{3D} associée au triplet (C, C, \mathcal{A}) . Soit μ un chemin de \mathcal{C} en lequel A^{3D} est définie : $A^{3D}(\mu)$ est la *rentabilité 3D de μ* — relativement à C .

Prévoir de dépenser $\inf_{v \in P \sim Q} C(v)$ pour rejoindre Q à partir de P , c'est être à la fois économe, pragmatique, très optimiste et (assez) mal renseigné. Comme si un automobiliste, pour estimer la distance qu'il lui reste à parcourir, examinait une carte topographique en se disant que dans cette région civilisée des tunnels ont certainement été creusés et des ponts bâtis. Contrairement à A^{2D} , A^{3D} connaît les cotes de P et Q . Ayant plus le sens des réalités, elle est moins sévère dans ses jugements. Soit μ un chemin de \mathcal{C} , P son origine, Q son extrémité. Si A^{3D} est définie en μ , A^{2D} l'est également et : $A^{2D}(\mu) \leq A^{3D}(\mu)$. Si A^{2D} est définie en μ et A^{3D} non, c'est que A^{2D} juge le chemin absolument non rentable ($A^{2D}(\mu)$ est nul) alors que A^{3D} préfère ne pas se prononcer (de toute façon, il n'y a pas de chemin plus rentable reliant P à Q). Dans le cas particulier où C est l'application de \mathcal{C} vers \mathbf{R}_+^* qui à tout chemin associe sa longueur, $\inf_{v \in P \sim Q} C(v)$ est égal à PQ . La mesure A^{3D} est donc partout définie et la valeur $A^{3D}(\mu)$ est tout simplement PQ/λ — en désignant par λ la longueur de μ . Dans le cas général, la recherche de la valeur $\inf_{v \in P \sim Q} C(v)$ est associée à celle d'un arc géométrique de l'espace, reliant P à Q , mais n'appartenant pas nécessairement à \mathcal{C} . Le problème posé peut s'avérer complexe. Les mesures de rentabilité 3D isocline constituent un moyen de le contourner.

3.4. Mesures de rentabilité 3D isocline

Soit C la fonction économique générée par une application δ et soit A^{3D} la mesure de rentabilité 3D associée à C . Soit d'autre part μ un chemin de \mathcal{C} , P son origine, Q son extrémité. Savoir si

A^{3D} est définie en μ et calculer le cas échéant $A^{3D}(\mu)$ n'est pas toujours facile. Mais il est possible de donner une estimation $m(\mu)$ de $\inf_{v \in P \sim Q} C(v)$, par exemple en posant :

$$[y_{\overline{PQ}} = 0 \Rightarrow m(\mu) = x_{\overline{PQ}} / \delta(0)]$$

$$\text{et } [y_{\overline{PQ}} > 0 \Rightarrow m(\mu) = y_{\overline{PQ}} / \max_{\alpha \in [0, \angle_{\overline{PQ}}]} (\delta(\alpha) \cdot \sin(\alpha))]$$

$$\text{et } [y_{\overline{PQ}} < 0 \Rightarrow m(\mu) = y_{\overline{PQ}} / \min_{\alpha \in [\angle_{\overline{PQ}}, 0]} (\delta(\alpha) \cdot \sin(\alpha))]$$

Pour obtenir cette estimation, un chemin v de $P \sim Q$ n'est considéré dans le calcul de l'expression $\inf_{v \in P \sim Q} C(v)$ que si tous les chemins linéaires dont il est la juxtaposition ont la même pente. Nous avons bien entendu : $m(\mu) \geq \inf_{v \in P \sim Q} C(v)$. La mesure de rentabilité obtenue, $A^{\angle 3D}$, est une *mesure de rentabilité 3D isocline*. Elle n'est définie en μ que si $m(\mu)$ est fini, ou $C(\mu)$. La *rentabilité 3D isocline de μ* est alors : $A^{\angle 3D}(\mu) = \min\{1, m(\mu)/C(\mu)\}$. $A^{\angle 3D}$ est encore moins sévère que ses congénères. Si $A^{\angle 3D}$ est définie en μ , A^{3D} et A^{2D} le sont également et :

$$0 \leq A^{2D}(\mu) \leq A^{3D}(\mu) \leq A^{\angle 3D}(\mu) \leq 1$$

Si A^{3D} est définie en μ et $A^{\angle 3D}$ non, c'est que A^{3D} juge le chemin absolument non rentable ($A^{3D}(\mu)$ est nul) alors que $A^{\angle 3D}$ préfère ne pas se prononcer (car dans l'incapacité de dire si oui ou non il existe un meilleur chemin reliant P à Q).

4. Rentabilité d'un point selon une région, d'une région selon une autre

Nous allons voir maintenant comment il est possible, en s'appuyant sur les mesures précédentes, d'évaluer la rentabilité d'un point selon une région, d'une région selon une autre. Nous montrons tout d'abord §4.1, après un bref rappel sur les fonctions économiques de graphe et les chemins optimaux, comment associer un graphe orienté valué à un MNT matriciel et une fonction économique de l'espace. La définition générale de la rentabilité d'une région selon une autre (et donc de l'accessibilité d'une région depuis une autre) est présentée dans le paragraphe §4.2. Les mesures de rentabilité 2D sont certainement les plus évidentes (§4.3). Elles nous permettent d'illustrer clairement §4.4 la complémentarité des informations de coût et rentabilité, distance et accessibilité.

4.1. Retour dans l'espace discret

4.1.1. Rappels et notations

Soit X un ensemble fini et non vide, U un sous-ensemble de X^2 , V une application de U vers $\overline{\mathbf{R}}_+^*$. Le triplet (X, U, V) constitue un graphe orienté valué. Pour tout couple (p, q) d'éléments de X , $p \wedge q$ dénote l'ensemble des chemins du graphe allant de p vers q . Pour tout couple (Y, Z) de parties non vides de X , $Y \wedge Z$ dénote l'ensemble des chemins allant d'un élément de Y vers un élément de Z :

$$Y \wedge Z = \bigcup_{(p, q) \in Y \times Z} p \wedge q$$

L'application C , de l'ensemble des chemins du graphe vers $\bar{\mathbf{R}}_+$, qui à tout chemin $(u_i)_{i \in 1..n}$ associe la valeur $\sum_{i \in 1..n} V(u_i)$, est la *fonction économique du graphe*. $\sum_{i \in 1..n} V(u_i)$ est le *coût* du chemin $(u_i)_{i \in 1..n}$. Soit maintenant Y une partie non vide de X , $\Delta \mid X^2 \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$ et $\Delta_Y \mid X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$ les applications définies par :

$$\begin{aligned} \forall (p,q) \in X^2, \quad & [p=q \Rightarrow \Delta(p,q)=0] \text{ et} \\ & [(p \neq q \text{ et } p \wedge q = \emptyset) \Rightarrow \Delta(p,q)=+\infty] \text{ et} \\ & [(p \neq q \text{ et } p \wedge q \neq \emptyset) \Rightarrow \Delta(p,q) = \min_{\mu \in p \wedge q} C(\mu)] \\ \forall q \in X, \quad & \Delta_Y(q) = \min_{p \in Y} \Delta(p,q) \end{aligned}$$

$\Delta(p,q)$ est le *moindre coût* pour rejoindre q à partir de p . Un chemin μ du graphe, d'origine p et d'extrémité q , est dit *optimal* — ou *de moindre coût* — si et seulement si : $C(\mu) = \Delta(p,q)$. $\Delta_Y(q)$ est le *moindre coût* pour rejoindre q à partir de Y . Δ_Y est l'*image des moindres coûts* (depuis Y).

4.1.2. Graphes, MNT matriciels et fonctions économiques de l'espace

À une image numérique il est classique d'associer le graphe orienté dont les sommets sont les pixels de l'image et les arcs sont, habituellement, les couples de sommets 8-voisins. Soit donc (X,U) le graphe associé à une image I . Nous allons voir maintenant comment valuer (X,U) à partir de la donnée d'une fonction économique de l'espace affine euclidien : C . Assimilons les pixels de I à des points de l'espace discret \mathbf{Z}^2 et plongeons celui-ci dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . Supposons que I modélise une surface de l'espace affine. À un pixel p de l'image correspond alors un point P de cet espace : p est le projeté orthogonal de P sur le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) et la cote de P est le niveau de gris de p dans I (à un facteur d'échelle près). Nous conserverons dorénavant cette notation : lettre minuscule pour le pixel, même lettre mais majuscule pour le point associé. L'application V de U vers $\bar{\mathbf{R}}_+$ qui à tout arc (p,q) associe $C(\overline{PQ})$ permet de valuer le graphe (X,U) . Quelle relation y a-t-il entre la fonction économique de l'espace, C , et la fonction économique du graphe (X,U,V) ? Un chemin μ de ce dernier peut être représenté par une suite $(p_i)_{i \in 1..n}$ de sommets, avec n entier supérieur ou égal à 2, telle que : $\forall i \in 1..n-1, (p_i, p_{i+1}) \in U$. Le coût de μ est $\sum_{i \in 1..n-1} V(p_i, p_{i+1})$, soit encore $\sum_{i \in 1..n-1} C(\overline{P_i P_{i+1}})$, c'est-à-dire enfin $C(\overline{P_i}^{i \in 1..n})$. Nous nous autorisons de ce fait à noter la fonction économique du graphe comme la fonction économique de l'espace : C .

4.2. Principe et définition générale

Définition 9.

Soit I une image numérique ; C_r et C_i deux fonctions économiques de l'espace ; (X,U,V) le graphe valué associé à I et C_r ; \mathcal{A} une application de $\mathcal{P}^*(X) \times \mathcal{P}^*(X)$ vers l'ensemble des parties de \mathcal{C} — où $\mathcal{P}^*(X)$ dénote l'ensemble des parties non vides de X .

La *mesure de rentabilité* A associée au quadruplet $(I, C_r, C_i, \mathcal{A})$ est une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathcal{P}^*(X) \times \mathcal{P}^*(X)$ et l'ensemble d'arrivée $[0,1]$. Soit Y et Z deux parties non vides de X . Si Y et Z ne sont pas disjointes, alors A est définie en (Y,Z) et : $A(Y,Z)=1$. Si elles sont disjointes, A n'est définie en (Y,Z) que si l'une au moins des valeurs $\inf_{v \in \mathcal{A}(Y,Z)} C_i(v)$ et $\min_{\eta \in Y \vee Z} C_r(\eta)$ est finie. Auquel cas :

$$A(Y,Z) = \min \{1, [\inf_{v \in \mathcal{A}(Y,Z)} C_i(v)] / [\min_{\eta \in Y \wedge Z} C_r(\eta)]\}$$

$A(Y,Z)$ est la *rentabilité de Z selon Y* — relativement à $(I, C_r, C_i, \mathcal{A})$. La fonction A_Y de X vers $[0,1]$ qui à tout sommet q associe $A(Y, \{q\})$ est l'*image des rentabilités selon Y*. Si A est définie en $(Y, \{q\})$, la valeur $A(Y, \{q\})$ est la *rentabilité de q selon Y*.

Nous pouvons reprendre ici les éléments d'interprétation donnés dans le paragraphe §3.1 et concernant la rentabilité d'un chemin de l'espace affine. Soit μ un chemin du graphe (X, U, V) tel que : $C_r(\mu) = \min_{\eta \in Y \wedge Z} C_r(\eta)$.

- ⇒ μ est considéré comme le moyen adopté pour joindre Z depuis Y au moindre coût.
- ⇒ $\mathcal{A}(Y,Z)$ constitue l'ensemble des moyens qui a priori permettent d'atteindre ce but \mathcal{E} .
- ⇒ $\inf_{v \in \mathcal{A}(Y,Z)} C_i(v)$ est le prix idéal : celui qu'a priori il suffit de payer pour atteindre \mathcal{E} .
- ⇒ $\min_{\eta \in Y \wedge Z} C_r(\eta)$ est le prix réel : celui qu'il faudra effectivement payer pour atteindre \mathcal{E} .

$A(Y,Z)$ est tout simplement la rentabilité de μ au sens de la définition 6 (§3.1), le but à atteindre n'étant pas d'aller d'un point (l'origine de μ) à un autre (l'extrémité de μ), mais d'une région (Y) à une autre (Z). Dans l'expression de $A(Y,Z)$, C_r représente bien sûr la fonction économique du graphe (X, U, V) . Nous avons :

$$\min_{\eta \in Y \wedge Z} C_r(\eta) = \min_{q \in Z} \min_{p \in Y} \min_{\eta \in p \wedge q} C_r(\eta) = \min_{q \in Z} \Delta_Y(q)$$

En général, \mathcal{A} sera choisie de manière à vérifier : $\mathcal{A}(Y,Z) = \bigcup_{(p,q) \in Y \times Z} \mathcal{A}(\{p\}, \{q\})$. Il vient alors une égalité semblable à la précédente : $\inf_{v \in \mathcal{A}(Y,Z)} C_i(v) = \min_{q \in Z} \min_{p \in Y} \inf_{v \in \mathcal{A}(\{p\}, \{q\})} C_i(v)$. Et si Z se réduit à un singleton $\{q\}$, la rentabilité de $\{q\}$ selon Y (autrement dit, la rentabilité du point q selon la région Y) s'exprime par : $A(Y, \{q\}) = \min \{1, [\min_{p \in Y} \inf_{v \in \mathcal{A}(\{p\}, \{q\})} C_i(v)] / \Delta_Y(q)\}$.

4.3. Mesures de rentabilité 2D

Soit I une image numérique ; C une fonction économique clino-dépendante de l'espace ; (X, U, V) le graphe valué associé à I et C ; \mathcal{A} l'application de $\mathcal{P}^*(X) \times \mathcal{P}^*(X)$ vers l'ensemble des parties de \mathcal{C} définie par : $\forall (Y, Z) \in \mathcal{P}^*(X) \times \mathcal{P}^*(X), \mathcal{A}(Y, Z) = \bigcup_{(p,q) \in Y \times Z} \mathcal{D}_p \sim \mathcal{D}_q = \bigcup_{(p,q) \in Y \times Z} \mathcal{D}_p \sim \mathcal{D}_Q$.

Soit maintenant Y une partie non vide de X . Nous nous intéressons ici à l'image A_Y des rentabilités selon Y — et relativement à (I, C, C, \mathcal{A}) . Comme nous allons le voir, c'est une mesure très simple à comprendre et manipuler. Elle est bien sûr à rapprocher des mesures de rentabilité 2D définies sur l'ensemble des chemins de l'espace affine euclidien (§3.2). Elle peut aussi être rapprochée de l'application a_z présentée dans le paragraphe §1.2.2.

□

Pour tout sommet q de $X-Y$ en lequel A_Y est définie, nous avons :

$$A_Y(q) = \min \{1, [\inf_{v \in \mathcal{A}(Y, \{q\})} C(v)] / [\min_{\eta \in Y \wedge \{q\}} C(\eta)]\}$$

$$A_Y(q) = \min \{1, [\min_{p \in Y} \inf_{v \in \mathcal{D}_p \sim \mathcal{D}_Q} C(v)] / \Delta_Y(q)\} = [\min_{p \in Y} \inf_{v \in \mathcal{D}_p \sim \mathcal{D}_Q} C(v)] / \Delta_Y(q)$$

Nous supposons désormais que C est générée par une application δ continue. C est donc une fonction clino-dépendante, minimale en une certaine valeur θ . Et d'après la proposition 5 :

$$\inf_{v \in \mathcal{D}_p \sim \mathcal{D}_q} C(v) = pq / \max_{\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[} (\delta(\alpha) \cdot \cos(\alpha))$$

où pq désigne évidemment la distance euclidienne entre p et q .

En notant K l'inverse de $\max_{\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[} (\delta(\alpha) \cdot \cos(\alpha))$, nous obtenons :

$$A_Y(q) = K \cdot (\min_{p \in Y} pq) / \Delta_Y(q)$$

□

Même si les pixels de I ont tous le même niveau de gris (cas d'un terrain plat) et si C est la fonction énergétique de randonnée qui à tout chemin associe sa longueur euclidienne, il est peu probable que la valeur précédente soit maximale (égale à 1). Car les connaissances a priori sur lesquelles repose l'estimation du coût d'un trajet de Y à q sont représentées exclusivement par C et \mathcal{A} : en particulier, la contrainte sur les déplacements imposée par le maillage n'est pas prise en compte. Soit r et s deux pixels. S'ils sont 4-voisins, la distance rs est une certaine valeur a (1 en général, mais tout dépend de l'unité choisie). S'il sont voisins indirects, c'est une valeur b . Bien évidemment : $b = a\sqrt{2}$. Tenir compte de la contrainte évoquée plus haut, c'est opérer une transcription discrète du terme $\min_{p \in Y} pq$ qui apparaît dans l'expression de $A_Y(q)$. Autrement dit, c'est substituer à ce terme la valeur $d_Y(q)$, où d représente la distance du chanfrein $a;b$ et d_Y l'image des distances d à Y ([Chas91](#)). Il vient alors :

$$A_Y(q) = K \cdot d_Y(q) / \Delta_Y(q)$$

□

La distance du chanfrein $a;b$ — c'est-à-dire $a;a\sqrt{2}$ — n'est pas la plus adaptée pour approcher la distance euclidienne. On lui préfère généralement la distance 3;4 ([Borg86](#), [Chas91](#)). Modifier d est possible, mais pour rester cohérent, il faut alors modifier la fonction économique du graphe. Dans la section §4.1.2, nous avons valué tout arc (r,s) par $C(\overline{RS})$, soit, d'après la proposition 2, par :

$$V(r,s) = C(\overline{RS}) = \frac{x_{\overline{RS}}}{\cos(\angle_{\overline{RS}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{RS}})} = \frac{rs}{\cos(\angle_{\overline{RS}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{RS}})}$$

Modifier d c'est revenir aussi sur la définition de V en posant :

$$\forall (r,s) \in U, V(r,s) = \frac{d(r,s)}{\cos(\angle_{\overline{RS}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{RS}})}$$

Observons que $C(r,s)$ — où C désigne la fonction économique du graphe — n'est plus forcément égal à $C(\overline{RS})$ — où C désigne la fonction économique de l'espace.

4.4. Quelques résultats expérimentaux

Nous venons de voir comment définir une image de rentabilités 2D en tenant compte lors de l'estimation des coûts de la contrainte sur les déplacements imposée par le maillage. La figure 6 illustre quelques traits caractéristiques des mesures de rentabilité 2D. Nous commentons ici les

tables de résultats 1 à 3 réunies en annexe B. Altitudes, rentabilités et coûts élevés correspondent à des zones claires. Toutes les images considérées sont des images numériques à 256 niveaux de gris, de taille 256×256. La distance du chanfrein utilisée est la distance 3;4. Coûts et rentabilités fournissent indubitablement des informations riches et complémentaires.

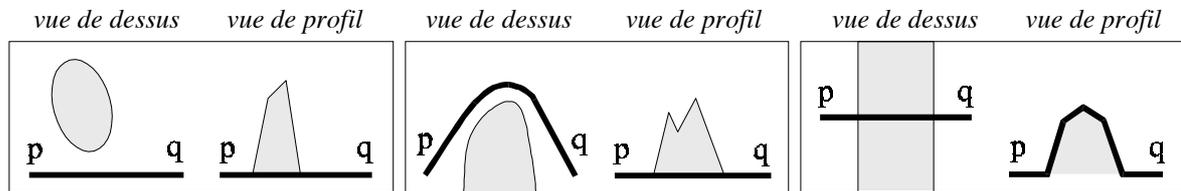


figure 6. Rentabilité 2D de q selon $\{p\}$.

Les chemins optimaux sont représentés en gras.

Le point q ne peut être jugé très facilement accessible depuis p que dans le premier cas (à gauche).
 Suivant le choix de la génératrice δ , q peut être jugé plus accessible dans le second cas que dans le troisième, même si les distances pq sont identiques et les longueurs des chemins optimaux également.

↳ Table 1

La fonction économique générée par δ est une fonction énergétique de randonnée. Le randonneur est situé au milieu du MNT. Comme de manière générale il préfère les pentes aux côtes, le terrain est nettement plus accessible au « nord » qu'au « sud ». L'image des rentabilités le montre bien : la partie supérieure est nettement plus claire que la partie inférieure. Sur les pentes de 22.5° , le randonneur se sent particulièrement à l'aise. Suivre une telle pente, c'est se diriger grosso modo vers le nord-ouest ou le nord-est. On perçoit distinctement les deux secteurs angulaires correspondants dans la partie supérieure de l'image des rentabilités.

↳ Table 2

La fonction économique générée par δ est la fonction énergétique de randonnée qui à tout chemin associe sa longueur euclidienne. Le randonneur est situé dans le coin supérieur gauche du MNT. De cet endroit là, près des trois quarts du terrain représenté sont tout à fait accessibles (zone blanche sur l'image des rentabilités). Le sommet de la colline est évidemment beaucoup moins accessible. Idem pour la région située immédiatement derrière, vers le sud-est. Car pour y accéder il faut soit gravir la colline soit la contourner.

↳ Table 3

La fonction économique générée par δ est encore une fonction énergétique de randonnée. On distingue nettement une sinuosité sombre au beau milieu de la partie supérieure du MNT. C'est dans ce fond de vallée que se trouve le randonneur, pratiquement à la frontière extrême nord de la zone 1. Notre personnage, qui aime les terrains plats, peut facilement longer la vallée dans la direction sud-sud-ouest et traverser de part en part la zone 1 (sinuosité blanche au milieu de l'image des rentabilités). Il peut aussi remonter au nord vers la plaine (région triangulaire très claire dans la partie supérieure de l'image des rentabilités). Le fond de vallée situé dans la zone 2 est moins facile d'accès : pour s'y rendre, il faut soit gravir une colline (à l'intersection des régions 1 et 2) soit faire un grand détour. Le Mont Ventoux (zone 4) constitue évidemment un obstacle, et son versant sud n'est pas très accessible non plus. Idem pour le versant est du mont situé dans la région 3.

5. Calcul des moindres coûts

5.1. Introduction

Dans ce paragraphe §5, I désigne un MNT matriciel ; C une fonction économique de l'espace affine ; (X,U,V) le graphe valué associé à I et C ; Y une partie non vide de X . Nous nous intéressons au calcul de l'image des moindres coûts Δ_Y . La connaissance des moindres coûts équivaut évidemment à celle des chemins optimaux. Nous proposons tout d'abord §5.2 une formulation commune des algorithmes classiques de Bellman ([Bell58](#)) et Dijkstra ([Dijk59](#)). Selon cette formulation, les deux algorithmes ne diffèrent fondamentalement que sur le choix d'une relation de préordre total (§5.3, §5.4). Définir un graphe à partir d'un MNT confère évidemment à ce graphe certaines caractéristiques. Or les algorithmes de Bellman et Dijkstra sont des algorithmes très généraux, qui n'ont pas été développés avec le souci d'exploiter les caractéristiques précédentes. Sedgewick et Vitter ont conçu un algorithme pour des graphes euclidiens ([Sedg86](#)) : ce sont des graphes non orientés dont les sommets sont des points de l'espace affine euclidien et les arêtes des segments valués par leur longueur. Mais le problème traité est la recherche d'un chemin optimal entre deux sommets donnés. Bovet s'est attaqué au même problème et a développé un algorithme similaire ([Bove86](#)). Nous présentons dans la section §5.5 un algorithme performant dédié à la recherche de chemins optimaux dans un graphe tel que (X,U,V) . Cet algorithme, dit des *flux et reflux*, permet un calcul rapide et croisé de l'image des moindres coûts et de celle des rentabilités 2D. Il est défini selon la formulation précédente, par la donnée d'une relation de préordre.

5.2. Formulation générale au moyen d'une relation de préordre

L'ensemble des 8-voisins d'un sommet p de X constitue à la fois l'ensemble $\Gamma(p)$ des successeurs de p et l'ensemble $\Gamma^{-1}(p)$ de ses prédécesseurs. Soit \triangleleft (« antérieur à ») une relation de préordre total définie sur X . À tout sommet p associons les ensembles $\{q \in \Gamma^{-1}(p) / q \triangleleft p\}$, $\{q \in \Gamma^{-1}(p) / q \triangleleft p \text{ et } p \triangleleft q\}$, $\{q \in \Gamma^{-1}(p) / p \triangleleft q \text{ et } \neg(q \triangleleft p)\}$, etc. Ces ensembles seront notés respectivement $\Gamma_{\triangleleft}^{-1}(p)$, $\Gamma_{=}^{-1}(p)$, $\Gamma_{\triangleright}^{-1}(p)$, etc.

Soit maintenant $(\Delta_Y^i)_{i \in \mathbf{N}}$ la suite d'applications de X vers $\overline{\mathbf{R}}_+$ définie par récurrence et récursivité de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall p \in X, [(p \in Y \Rightarrow \Delta_Y^0(p) = 0) \text{ et } (p \notin Y \Rightarrow \Delta_Y^0(p) = +\infty)] \\ \forall i \in \mathbf{N}, \forall p \in X, \Delta_Y^{2i+1}(p) = \min \{ \Delta_Y^{2i}(p), \min_{q \in \Gamma_{\triangleleft}^{-1}(p)} \{ \Delta_Y^{2i+1}(q) + V(q,p) \} \} \\ \forall i \in \mathbf{N}^*, \forall p \in X, \Delta_Y^{2i}(p) = \min \{ \Delta_Y^{2i-1}(p), \min_{q \in \Gamma_{=}^{-1}(p)} \{ \Delta_Y^{2i}(q) + V(q,p) \} \} \end{aligned}$$

La suite $(\Delta_Y^i)_{i \in \mathbf{N}}$ est décroissante et minorée par Δ_Y : $\forall i \in \mathbf{N}, \Delta_Y \leq \Delta_Y^{i+1} \leq \Delta_Y^i$.

D'autre part, elle converge vers Δ_Y . Plus exactement :

$$\exists j \in \mathbf{N} / \forall i \in \mathbf{N}, [(i \geq j \Rightarrow \Delta_Y^i = \Delta_Y) \text{ et } (i < j \Rightarrow \Delta_Y^i \neq \Delta_Y)]$$

En pratique, il faut tout d'abord calculer Δ_Y^1 , puis Δ_Y^2 , etc., jusqu'à ce que l'égalité de deux applications consécutives Δ_Y^j et Δ_Y^{j+1} soit constatée (ou admise). L'image des moindres coûts est alors : $\Delta_Y = \Delta_Y^j = \Delta_Y^{j+1}$. Quant au calcul de chaque application Δ_Y^i , il se fait séquentiellement, en examinant les sommets les uns après les autres. L'ordre dans lequel il faut procéder à cet examen est contraint par la relation \triangleleft .

5.3. Cas de l'algorithme de Bellman

La relation de préordre \triangleleft associée à l'algorithme de Bellman est une relation d'ordre préfixée. Son choix est guidé par le souci d'économiser simultanément l'espace mémoire et les accès disque. En représentant tout sommet de X par le couple de ses coordonnées dans I , nous pouvons définir \triangleleft de la manière suivante :

$$\forall (a_1, b_1) \in X, \forall (a_2, b_2) \in X, (a_1, b_1) \triangleleft (a_2, b_2) \Leftrightarrow [b_2 < b_1 \text{ ou } (b_2 = b_1 \text{ et } a_1 \leq a_2)]$$

Pour calculer les applications Δ_Y^{2i+1} , il faut balayer les données images du haut vers le bas et de la gauche vers la droite (en supposant qu'abscisses et ordonnées sont minimales dans le coin inférieur gauche de l'image). Pour le calcul des Δ_Y^{2i} le balayage doit s'effectuer en sens inverse, du bas vers le haut et de la droite vers la gauche. Il est donc possible de procéder ligne par ligne, ce qui répond bien au souci d'économie exprimé plus haut. L'algorithme de Bellman est de complexité $\mathcal{O}(N^2)$, où N désigne le nombre de pixels de l'image (l'ordre du graphe). C'est un algorithme dit à correction d'étiquettes (*Prin94*) : dans l'image courante d'estimation des coûts (Δ_Y^i), tant que la convergence n'est pas observée ($\Delta_Y^{i+1} \neq \Delta_Y^i$), on ne peut être certain de trouver un seul moindre coût $\Delta_Y(p)$ (hormis les coûts nuls). D'autre part, lors de chaque double balayage (près de $N/2$ peuvent être nécessaires en théorie), toute valuation $V(u)$ d'arc est susceptible d'être consultée.

5.4. Cas de l'algorithme de Dijkstra

Le choix de la relation de préordre associée à l'algorithme de Dijkstra est guidé par le souci d'économiser le temps CPU. \triangleleft est définie dynamiquement, c'est-à-dire lors du déroulement même de l'algorithme, par : $\forall (p, q) \in X^2, p \triangleleft q \Leftrightarrow \Delta_Y(p) \leq \Delta_Y(q)$. Ce choix garantit l'égalité : $\Delta_Y^1 = \Delta_Y$. En contrepartie, il rend nécessaire la possibilité d'accéder à tout moment à n'importe quel sommet du graphe. Toutes les données doivent donc être disponibles en mémoire centrale. Dans sa version avec structure de tas (*Prin94*), avantageuse ici puisque le graphe est peu dense, l'algorithme de Dijkstra est de complexité $\mathcal{O}(N \ln(N))$. C'est un algorithme à fixation d'étiquettes : l'image des coûts est calculée méthodiquement, valeur par valeur, du plus petit moindre coût au plus grand. D'autre part, toute valuation $V(u)$ d'arc est consultée exactement une fois.

5.5. L'algorithme des flux et reflux

La relation de préordre associée à l'algorithme des flux et reflux est définie au cours d'une phase d'initialisation, en fonction de Y et d'une distance discrète :

$$\forall (p,q) \in X^2, [p \triangleleft q \Leftrightarrow d_Y(p) \div a \leq d_Y(q) \div a]$$

où \div dénote la division euclidienne et où d est la distance du chanfrein $a;b$ et d_Y l'image des distances d à Y . Le choix de cette relation est guidé par le souci d'exploiter les caractéristiques du graphe (X,U,V) , afin d'économiser le temps CPU. Dans le paragraphe §5.5.1, nous précisons ce que nous entendons par « caractéristiques ».

5.5.1. Retournements, flux et reflux

□

Soit μ un chemin défini par la suite $(p_i)_{i \in 1..n}$ de sommets.

Nous dirons qu'il est *issu de* Y si et seulement si : $Y \cap \{p_i\}_{i \in 1..n} = \{p_1\}$

Nous dirons qu'il *s'éloigne de* Y (selon d) si et seulement si : $\forall i \in 1..n-1, p_i \in \Gamma_{<}^{-1}(p_{i+1})$

Nous dirons qu'il *se rapproche de* Y (selon d) si et seulement si : $\forall i \in 1..n-1, p_i \in \Gamma_{>}^{-1}(p_{i+1})$

Nous dirons qu'il *tourne autour de* Y (selon d) si et seulement si : $\forall i \in 1..n-1, p_i \in \Gamma_{=}^{-1}(p_{i+1})$

□

Soit μ un chemin. Il existe une unique suite $(\mu_i)_{i \in 0..n}$ de chemins, avec n entier naturel, telle que :

- ➔ μ s'obtient par juxtaposition des μ_i :
 - ♦ pour tout élément i de $0..n$, μ_i est une suite de sommets consécutifs de μ ,
 - ♦ l'origine de μ_0 est celle de μ , l'extrémité de μ_n est celle de μ ,
 - pour tout élément i de $0..n-1$, l'extrémité de μ_i est l'origine de μ_{i+1} .
- ➔ ♦ pour tout élément i de $0..n$, μ_i tourne autour de Y , s'en éloigne ou s'en rapproche.
- ♦ pour tout élément i de $0..n-1$, si μ_i s'éloigne de Y , ce n'est pas le cas de μ_{i+1} ,
 si μ_i se rapproche de Y , ce n'est pas le cas de μ_{i+1} ,
 si μ_i tourne autour de Y , ce n'est pas le cas de μ_{i+1} .

n est le *nombre de retournements* du chemin μ vis-à-vis de Y (et selon d).

□

Enfin, Δ_Y^{2i+1} est le $(i+1)$ ème *flux* (généralisé par Y sur (X,U,V) et selon d), Δ_Y^{2i} le i ème *reflux*.

L'algorithme des flux et reflux pour le calcul de l'image des moindres coûts Δ_Y est conçu en partant du principe que les chemins optimaux issus de Y ont tendance à admettre peu de retournements vis-à-vis de Y . Le premier flux Δ_Y^1 donne les coûts de tous les chemins optimaux qui sont issus de Y et sont sans retournement vis-à-vis de Y . Le premier reflux Δ_Y^2 les coûts de tous les chemins optimaux qui sont issus de Y et présentent un retournement et un seul vis-à-vis de Y . Et ainsi de suite (fig.7, fig.8).

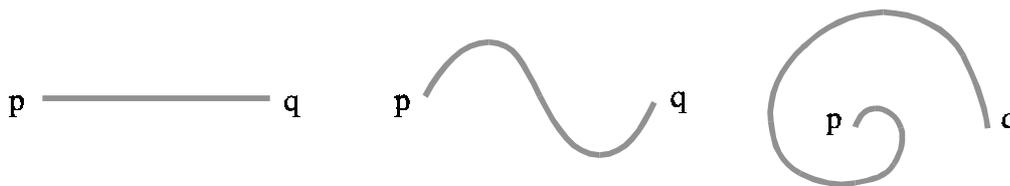


figure 7. Exemples de chemins sans retournement vis-à-vis de $\{p\}$.

Si ce sont des chemins optimaux, leur coût sera donné par le premier flux généré par $\{p\}$.

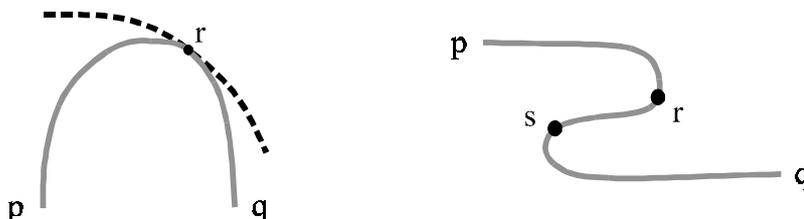


figure 8. Exemples de chemins avec retournements vis-à-vis de $\{p\}$.

Si le chemin représenté à gauche (respectivement à droite) est optimal, son coût sera donné par le premier reflux (respectivement par le second flux) généré par $\{p\}$.

5.5.2. Initialisation de l'algorithme

\triangleleft n'est pas une relation d'ordre. Soit p un élément de $X-Y$: $\{q \in X / p \triangleleft q \text{ et } q \triangleleft p\}$ est tout simplement la courbe de niveau (associée à Y et selon d) à laquelle appartient p . L'initialisation de l'algorithme consiste essentiellement à partitionner $X-Y$ en courbes de niveau puis à ordonner chacune des courbes obtenues. Le partitionnement est réalisé en calculant l'image des distances d_Y . Le fait que d soit une distance pondérée permet de bénéficier d'un algorithme séquentiel très efficace en $\mathcal{O}(N)$ ([Rose66](#), [Borg84](#)). L'ordination d'une courbe de niveau est réalisée en procédant à un suivi de contour : un chemin qui tourne autour de Y est ainsi défini. Le traitement de l'ensemble des courbes se fait, comme le partitionnement, en $\mathcal{O}(N)$. Rappelons que le principe d'un suivi de contour ([Rose70](#), [Yoko75](#)) est rattaché à celui d'un codage de Freeman ([Free61](#)). Notons enfin que le calcul de l'image des distances d_Y prépare non seulement au calcul des flux et reflux mais aussi à celui de l'image des rentabilités 2D selon Y (§4.3).

5.5.3. Calcul des flux et reflux

Un flux se calcule en $\mathcal{O}(N)$, en considérant les courbes de niveau par distances à Y croissantes. Pour un reflux, il faut considérer les courbes par distances décroissantes. Le schéma de calcul d'un flux Δ_Y^{2i+1} en tous les pixels d'une courbe de niveau est donné ci-après. $(p_k)_{k \in 1..n}$ désigne la suite ordonnée des pixels de la courbe.

```

k ← 1 ;
tant que k ≤ n faire
  debut
     $\Delta_Y^{2i+1}(p_k) \leftarrow \min\{\Delta_Y^{2i}(p_k), \min_{q \in \Gamma_{<}^{-1}(p_k)}\{\Delta_Y^{2i+1}(q) + V(q, p_k)\}\}$  ;
    k ← k + 1
  fin ;

```

```

k←-1 ;
tant que (k≤n ou  $\Delta_Y^{2i+1}(p_k) > \Delta_Y^{2i+1}(p_{k-1}) + V(p_{k-1}, p_k)$ ) faire
  debut
     $\Delta_Y^{2i+1}(p_k) \leftarrow \Delta_Y^{2i+1}(p_{k-1}) + V(p_{k-1}, p_k)$  ;
    k←k+1
  fin ;
k←n ;
tant que (k≥1 ou  $\Delta_Y^{2i+1}(p_k) > \Delta_Y^{2i+1}(p_{k+1}) + V(p_{k+1}, p_k)$ ) faire
  debut
     $\Delta_Y^{2i+1}(p_k) \leftarrow \Delta_Y^{2i+1}(p_{k+1}) + V(p_{k+1}, p_k)$  ;
    k←k-1
  fin ;

```

L'objet de la première boucle est de propager les coûts d'une courbe de niveau à l'autre, depuis la plus proche de Y vers la plus éloignée. Les deux dernières boucles assurent la propagation des coûts à l'intérieur d'une même courbe de niveau. Elles permettent de tenir compte des chemins qui tournent autour de Y (dans un sens ou dans l'autre). En théorie, chacune peut exiger jusqu'à $2n-1$ itérations. En pratique, un sous-chemin d'un chemin optimal, s'il tourne autour de Y , n'excède généralement pas deux à trois arcs : chaque boucle s'achève donc en n itérations, à deux ou trois unités près. Du fait de la troisième boucle, le temps d'exécution d'un flux ou d'un reflux est en moyenne un quart de fois plus long que celui d'un balayage dans l'algorithme de Bellman. Notons enfin que dans l'implémentation, les deux premières boucles sont fusionnées, et flux et reflux se partagent tous le même espace mémoire.

5.5.4. Remarques

L'algorithme des flux et reflux est de complexité $\mathcal{O}(N^2)$. Conçu en partant du principe que les chemins optimaux admettent peu de retournements, il est particulièrement bien adapté au traitement de MNT altimétriques. Notamment si le relief modélisé n'est pas excessivement accidenté et si la fonction économique est, par exemple, celle qui à tout chemin associe sa longueur (auquel cas « moindre coût » est à rapprocher de « distance géodésique », et « chemin optimal » de « géodésique minimale »). L'algorithme des flux et reflux est alors beaucoup plus rapide que ses concurrents. Car contrairement à l'algorithme de Dijkstra, il ne procède pas à un tri dynamique des sommets. Et l'image des moindres coûts peut s'obtenir en quatre balayages, contre une centaine en général pour l'algorithme de Bellman. Les trois premiers balayages s'inscrivent dans la phase d'initialisation (il en faut deux pour le partitionnement en courbes de niveau, un pour l'ordination de ces courbes). Le quatrième permet de calculer le premier flux. Observons que relancer l'algorithme avec une autre fonction économique (par exemple pour le calcul d'une image d'accessibilités) c'est procéder à un seul balayage supplémentaire. Inutile en effet de réitérer l'initialisation (qui prépare d'ailleurs elle-même au calcul de l'image des accessibilités 2D).

La forme de l'objet source Y est évidemment très variable. Mais on peut avoir régulièrement affaire à une forme donnée, c'est-à-dire à un « assemblage » donné de pixels. Le cas où Y est un singleton par exemple (calcul de l'image des distances à un point particulier) se présente a priori fréquemment. Or, le choix de la distance du chanfrein étant arrêté, c'est l'objet source Y qui détermine le produit de l'initialisation (une image 8-bits de codes de Freeman). On peut donc envisager de stocker ce produit et d'obtenir des images de moindres coûts en un seul balayage.

Si le relief modélisé est passablement accidenté, ou si de faibles variations de pente se traduisent par de fortes variations de coût, le premier flux ne suffit pas forcément à la convergence. Si l'objectif est d'avoir une estimation rapide de l'image des moindres coûts (elle-même n'est de toute façon qu'un reflet de la « réalité ») on peut s'en contenter. Ou du moins fixer une borne supérieure au nombre de balayages. Chacun d'eux correspond à un flux ou reflux supplémentaire, et s'interprète donc très concrètement en termes de retournements. Bien entendu, si la géographie du lieu est labyrinthique ou la fonction économique particulièrement capricieuse et hypersensible aux dénivellations, l'algorithme de Dijkstra reprend le dessus sur l'algorithme des flux et reflux. Nous manquons à cet instant précis de résultats expérimentaux et nous ne sommes pas en mesure de dire « quand » — c'est-à-dire pour quelle « complexité » des données — a lieu ce renversement de situation.

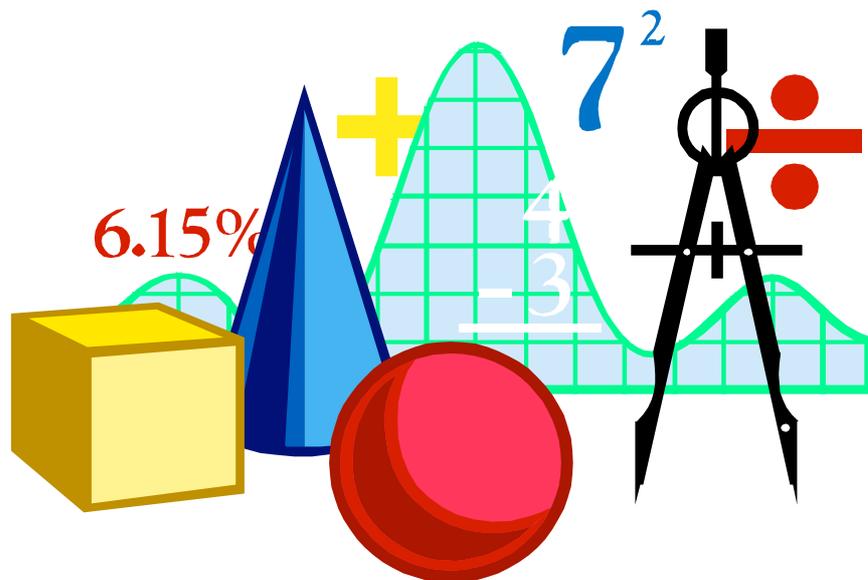
6. Conclusion

En nous appuyant sur l'étude de graphes orientés définis à partir de MNT matriciels, nous avons présenté dans ce chapitre une modélisation de l'accessibilité. Une telle modélisation intéresse notamment les systèmes experts dédiés à la classification automatique d'images satellites ou la résolution de problèmes d'aménagement régional. Elle a été proposée par le biais de mesures de rentabilité, définies dans un cadre formel et plus général. Rentabilité et accessibilité correspondent en effet, de la même manière que coûts et distances. Nous lions la notion subjective de rentabilité à la faculté de concevoir des fonctions économiques idéales, c'est-à-dire associées à des espaces physiques idéaux. Nous avons présenté un mode de construction de ces fonctions particulièrement simple et naturel. Le calcul même des rentabilités repose sur l'estimation, à partir de connaissances a priori, de coûts de déplacements. Nous avons développé d'autre part un nouvel algorithme : l'algorithme des flux et reflux. Dédié à la recherche de chemins optimaux dans un graphe orienté, valué, associé à un MNT matriciel, il permet un calcul rapide et croisé d'images de moindres coûts et d'images de rentabilités.

Les idées jetées dans ce chapitre sont loin d'avoir été explorées. Sur le plan expérimental aussi bien que sur le plan théorique. Nous nous sommes surtout intéressés aux rentabilités 2D. Mais d'autres mesures doivent être étudiées. Beaucoup de questions ont été laissées en suspens. Nous savons par exemple que la mesure de rentabilité 3D associée à une fonction économique C coïncide dans certains cas avec la mesure de rentabilité 3D isocline associée à C . Mais quels sont ces cas ? À quelle famille de génératrices δ correspondent-ils ? En pratique, nous avons fait appel à la distance du chanfrein 3;4. D'un point de vue théorique, on lui préfère généralement la distance 1;1.3507. Mais nous nous évadons du plan image. Une autre distance serait-elle plus indiquée ? Et ne pourrait-on pas faire appel à des distances pondérées définies par des masques 5×5 ? Cela sous-entend une multiplication du nombre d'arcs et donc une augmentation de la densité du graphe considéré. L'algorithme des flux et reflux pourrait-il prendre davantage le pas sur l'algorithme de Dijkstra ? Au-delà de toutes ces questions restées sans réponse, du « chemin » qu'il reste à parcourir, retenons les idées. Et une certitude : coûts et rentabilités fournissent des informations riches et complémentaires.

ANNEXE A

Démonstrations



(§2.2) Proposition 1

C désigne une fonction économique clino-dépendante de l'espace.

À tout réel k strictement positif associons la proposition $[p_k]$ suivante :

$[p_k]$ Soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{C} : $[PQ = k.RS \text{ et } \angle_{\overline{PQ}} = \angle_{\overline{RS}}] \Rightarrow C(\overline{PQ}) = k.C(\overline{RS})$

❶ Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, [p_n]$

Soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{C} tels que : $\angle_{\overline{PQ}} = \angle_{\overline{RS}}$

→ $[p_1]$ est vraie.

En effet, d'après [A2] (définition 2) : $PQ = RS \Rightarrow C(\overline{PQ}) = C(\overline{RS})$

→ Soit n un entier naturel non nul. Montrons que si $[p_n]$ est vraie, $[p_{n+1}]$ l'est aussi.

Supposons donc $[p_n]$ vraie. Supposons également que : $PQ = (n+1).RS$

Considérons le point T défini par : $\overrightarrow{PT} = [n/(n+1)] \cdot \overrightarrow{PQ}$

♦ T est un point de $[PQ]$, distinct de P et de Q. De ce fait, nous avons : $\overline{PQ} = \overline{PTQ}$

Et d'après [A1] (définition 1) : $C(\overline{PQ}) \stackrel{1}{=} C(\overline{PT}) + C(\overline{TQ})$

♦ Mais nous avons aussi : $(TQ = RS \text{ et } \angle_{\overline{TQ}} = \angle_{\overline{RS}})$ et $(PT = n.RS \text{ et } \angle_{\overline{PT}} = \angle_{\overline{RS}})$

Donc d'après $[p_1]$ et $[p_n]$: $C(\overline{TQ}) \stackrel{2}{=} C(\overline{RS})$ et $C(\overline{PT}) \stackrel{3}{=} n.C(\overline{RS})$

♦ Les égalités 1, 2 et 3 donnent finalement : $C(\overline{PQ}) = n.C(\overline{RS}) + C(\overline{RS}) = (n+1).C(\overline{RS})$

Nous pouvons donc affirmer que si $[p_n]$ est vraie, $[p_{n+1}]$ l'est aussi.

→ En conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}^*, [p_n]$

❷ Montrons maintenant que : $\forall r \in \mathbf{Q}_+^*, [p_r]$

Soit n et m deux entiers strictement positifs

et soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{C} tels que : $PQ = (n/m).RS$ et $\angle_{\overline{PQ}} = \angle_{\overline{RS}}$

Considérons le point T défini par : $\overrightarrow{PT} = m \cdot \overrightarrow{PQ}$

Nous avons : $(PT = m.PQ \text{ et } \angle_{\overline{PT}} = \angle_{\overline{PQ}})$ et $(PT = n.RS \text{ et } \angle_{\overline{PT}} = \angle_{\overline{RS}})$

Donc d'après $[p_m]$ et $[p_n]$: $C(\overline{PT}) = m.C(\overline{PQ})$ et $C(\overline{PT}) = n.C(\overline{RS})$

Par conséquent : $C(\overline{PQ}) = (n/m).C(\overline{RS})$

En conclusion : $\forall r \in \mathbf{Q}_+^*, [p_r]$

❸ Montrons enfin que : $\forall k \in \mathbf{R}_+^* - \mathbf{Q}_+^*, [p_k]$

Soit k un irrationnel positif et

soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{C} tels que : $PQ = k.RS$ et $\angle_{\overline{PQ}} = \angle_{\overline{RS}}$

Il existe une suite $(c_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'entiers naturels et une suite $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de rationnels telles que :

$$(\forall i \in \mathbf{N}^*, c_i \in 0..9) \text{ et } (\forall n \in \mathbf{N}, k_n = \sum_{i \in 0..n} (c_i / 10^i)) \text{ et } k = \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n$$

c_1 est le chiffre des dixièmes dans l'écriture décimale de k, c_2 le chiffre des centièmes, etc.

k_1 est la troncature au dixième de k, k_2 la troncature au centième, etc.

k n'étant pas nul, il existe un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow k_n \neq 0$

Soit n un entier strictement supérieur à n_0 et soit T, T_n et U les points définis par :

$$\overrightarrow{RT} = k \cdot \overrightarrow{RS} \text{ et } \overrightarrow{RT_n} = k_n \cdot \overrightarrow{RS} \text{ et } \overrightarrow{TU} = 10^{-n} \cdot \overrightarrow{RS} - (k - k_n) \cdot \overrightarrow{RS}$$

→ Montrons que : $C(\overline{PQ}) \stackrel{4}{=} k_n.C(\overline{RS}) + C(\overline{T_nT})$

♦ Nous avons : $(RT = PQ \text{ et } \angle_{\overline{RT}} = \angle_{\overline{PQ}})$ et $(RT_n = k_n.RS \text{ et } \angle_{\overline{RT_n}} = \angle_{\overline{RS}})$

Donc d'après $[p_1]$ et $[p_{k_n}]$: $C(\overline{RT}) \stackrel{5}{=} C(\overline{PQ})$ et $C(\overline{RT_n}) \stackrel{6}{=} k_n.C(\overline{RS})$

- ♦ Par définition de k_n et par hypothèse sur k : $0 < k_n < k$
 T_n est donc un point de $[RT]$ distinct de R et T . D'où : $\overline{RT} = \overline{RT_nT}$
 Et d'après [A1] : $C(\overline{RT}) \stackrel{7}{=} C(\overline{RT_n}) + C(\overline{T_nT})$
- ♦ Les égalités 5, 6 et 7 nous donnent bien l'égalité 4.
- Si $C(\overline{RS})$ est infini : $C(\overline{PQ}) = k.C(\overline{RS})$
 En effet, d'après l'égalité 4, si $C(\overline{RS})$ est infini $C(\overline{PQ})$ l'est aussi.
- Montrons que si $C(\overline{RS})$ est fini, nous avons encore : $C(\overline{PQ}) = k.C(\overline{RS})$
 Supposons donc $C(\overline{RS})$ fini.
- ♦ Par définition de T , T_n et U : $\overline{T_nT} = (k - k_n) \cdot \overline{RS}$ et $\overline{T_nU} = 10^{-n} \cdot \overline{RS}$
 Or par définition de k_n et par hypothèse sur k : $0 < k - k_n < 10^{-n}$
 T est donc un point de $[T_nU]$ distinct de T_n et de U . D'où : $\overline{T_nU} = \overline{T_nTU}$
 Et d'après [A1] : $C(\overline{T_nU}) \stackrel{8}{=} C(\overline{T_nT}) + C(\overline{TU})$
- ♦ Nous avons d'autre part d'après $[p_{10^{-n}}]$: $C(\overline{T_nU}) \stackrel{9}{=} 10^{-n}.C(\overline{RS})$
- ♦ Des égalités 8 et 9 il résulte que : $C(\overline{T_nT}) \leq 10^{-n}.C(\overline{RS})$
 Ce qui montre avec l'égalité 4 que : $0 \leq C(\overline{PQ}) - k_n.C(\overline{RS}) \leq 10^{-n}.C(\overline{RS})$
 En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'expression précédente il vient : $C(\overline{PQ}) = k.C(\overline{RS})$
- En conclusion : $\forall k \in \mathbf{R}_+^* - \mathbf{Q}_+^*, [p_k]$
 Et finalement : $\forall k \in \mathbf{R}_+^*, [p_k]$

(§2.3) **Proposition 2** ⇒

θ est un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$,

C est une fonction économique clino-dépendante minimale en θ .

❶ **lemme.** Soit \overline{PQ} un élément de \mathcal{C} : $PQ/C(\overline{PQ}) \in [0,1]$
 D'autre part : $\angle \overline{PQ} = \theta \Rightarrow PQ/C(\overline{PQ}) = 1$

- Examinons tout d'abord le cas où : $\angle \overline{PQ} = \theta$
 Soit R le point défini par : $\overline{PR} = (1/PQ) \cdot \overline{PQ}$
 Nous avons : $(PQ = PQ.PR$ et $\angle \overline{PQ} = \angle \overline{PR})$ et $(PR = 1$ et $\angle \overline{PR} = \theta)$
 Par conséquent : $C(\overline{PQ}) = PQ.C(\overline{PR}) = PQ$
 La première égalité découle de la proposition 1, la seconde de [A4] (définition 3).
 Il vient finalement : $PQ/C(\overline{PQ}) = 1$
- Dans le cas général, il existe un point R tel que : $PR = PQ$ et $\angle \overline{PR} = \theta$
 D'après [A3] (définition 3) : $C(\overline{PQ}) \geq C(\overline{PR})$
 Or l'étude précédente nous permet d'affirmer que : $C(\overline{PR}) = PR = PQ$
 Finalement : $C(\overline{PQ}) \geq PQ$
 D'où : $PQ/C(\overline{PQ}) \in [0,1]$

❷ Soit α un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$.

Une infinité de chemins \overline{PQ} de \mathcal{C} vérifient : $\angle \overline{PQ} = \alpha$. Considérons-en deux : $\overline{P_1Q_1}$ et $\overline{P_2Q_2}$.

Il existe un réel k strictement positif tel que : $P_1Q_1 = k.P_2Q_2$ et $\angle \overline{P_1Q_1} = \angle \overline{P_2Q_2} = \alpha$

Donc d'après la proposition 1 : $C(\overline{P_1Q_1}) = k.C(\overline{P_2Q_2})$. Nous avons de ce fait :

$$\begin{aligned} x_{\overline{P_1Q_1}} / [\cos(\angle_{\overline{P_1Q_1}}) \cdot C(\overline{P_1Q_1})] &= P_1Q_1 / C(\overline{P_1Q_1}) = [k \cdot P_2Q_2] / [k \cdot C(\overline{P_2Q_2})] \\ &= P_2Q_2 / C(\overline{P_2Q_2}) = x_{\overline{P_2Q_2}} / [\cos(\angle_{\overline{P_2Q_2}}) \cdot C(\overline{P_2Q_2})] \end{aligned}$$

Cette valeur ne dépend finalement que de α . D'après le lemme elle est comprise entre 0 et 1. De plus, elle vaut 1 si α vaut θ . Nous venons de définir une application δ de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $[0, 1]$ telle que : $\delta(\theta) = 1$. δ répond bien sûr au problème posé. L'unicité est triviale.

(§2.3) Proposition 2 ←

θ est un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$, δ est une application de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $[0, 1]$ valant 1 en θ .
Soit C la fonction de \mathcal{C} vers \mathbf{R}_+^* définie sur exactement l'ensemble des chemins \overline{PQ} de \mathcal{C} par :
 $C(\overline{PQ}) = x_{\overline{PQ}} / [\cos(\angle_{\overline{PQ}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{PQ}})]$

→ Considérons un élément \overline{PQ} de \mathcal{C} et un point R de $[PQ]$ distinct de P et de Q .

Il existe un élément t de $]0, 1[$ tel que : $\overrightarrow{PR} = t \cdot \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RQ} = (1-t) \cdot \overrightarrow{PQ}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} C(\overline{PR}) &= x_{\overline{PR}} / [\cos(\angle_{\overline{PR}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{PR}})] = t \cdot x_{\overline{PQ}} / [\cos(\angle_{\overline{PQ}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{PQ}})] = t \cdot C(\overline{PQ}) \\ C(\overline{RQ}) &= x_{\overline{RQ}} / [\cos(\angle_{\overline{RQ}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{RQ}})] = (1-t) \cdot x_{\overline{PQ}} / [\cos(\angle_{\overline{PQ}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{PQ}})] = (1-t) \cdot C(\overline{PQ}) \end{aligned}$$

Par conséquent : $C(\overline{PR}) + C(\overline{RQ}) = C(\overline{PQ}) = C(\overline{PRQ})$

Il est donc consistant d'utiliser [A1] (définition 1) pour étendre à \mathcal{C} le domaine de définition de C . Il n'y a bien entendu qu'une seule manière de procéder à cette extension. D'où l'existence et l'unicité d'une fonction économique C répondant au problème posé.

→ Soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{C} tels que : $PQ = RS$ et $\angle_{\overline{PQ}} = \angle_{\overline{RS}}$

Nous avons évidemment : $C(\overline{PQ}) = C(\overline{RS})$

C est donc clino-dépendante.

→ Soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{C} tels que : $PQ = RS$ et $\angle_{\overline{RS}} = \theta$

Nous avons : $C(\overline{PQ}) = x_{\overline{PQ}} / [\cos(\angle_{\overline{PQ}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{PQ}})] = PQ / \delta(\angle_{\overline{PQ}}) = RS / \delta(\angle_{\overline{PQ}})$

D'autre part : $C(\overline{RS}) = x_{\overline{RS}} / [\cos(\angle_{\overline{RS}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{RS}})] = RS / \delta(\angle_{\overline{RS}}) = RS / \delta(\theta) = RS$

D'où : $C(\overline{PQ}) \geq C(\overline{RS})$. Et si RS vaut 1 : $C(\overline{RS}) = 1$

C est donc minimale en θ .

(§2.4) Proposition 3

θ est un élément de $]-\pi/2, \pi/2[$,

δ est une application de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $[0, 1]$ valant 1 en θ ,

C est la fonction économique générée par δ .

Soit α et β deux éléments de $]-\pi/2, \pi/2[$ et

soit \overline{PQ} et \overline{RS} deux chemins de \mathcal{C} tels que : $PQ = RS$ et $\angle_{\overline{PQ}} = \alpha$ et $\angle_{\overline{RS}} = \beta$

Nous avons : $C(\overline{PQ}) = x_{\overline{PQ}} / [\cos(\angle_{\overline{PQ}}) \cdot \delta(\angle_{\overline{PQ}})] = PQ / \delta(\angle_{\overline{PQ}}) = PQ / \delta(\alpha)$

De même : $C(\overline{RS}) = RS / \delta(\beta) = PQ / \delta(\beta)$

→ Si C est une fonction énergétique de randonnée alors d'après [A5] (définition 5) :

$(\theta \geq \angle_{\overline{PQ}} \geq \angle_{\overline{RS}} \text{ ou } \theta \leq \angle_{\overline{PQ}} \leq \angle_{\overline{RS}}) \Rightarrow C(\overline{RS}) \geq C(\overline{PQ})$

D'où : $(\theta \geq \alpha \geq \beta \text{ ou } \theta \leq \alpha \leq \beta) \Rightarrow \delta(\alpha) \geq \delta(\beta)$

Par conséquent, δ est croissante sur $]-\pi/2, \theta[$ et décroissante sur $]\theta, \pi/2[$.

→ Si δ est croissante sur $]-\pi/2, \theta[$ et décroissante sur $]\theta, \pi/2[$:

$$(\theta > \alpha \geq \beta \text{ ou } \theta < \alpha \leq \beta) \Rightarrow \delta(\alpha) \geq \delta(\beta)$$

Nous avons même, puisque δ vaut 1 en θ : $(\theta \geq \alpha \geq \beta \text{ ou } \theta \leq \alpha \leq \beta) \Rightarrow \delta(\alpha) \geq \delta(\beta)$

$$D'où : (\theta \geq \angle \overline{PQ} \geq \angle \overline{RS} \text{ ou } \theta \leq \angle \overline{PQ} \leq \angle \overline{RS}) \Rightarrow C(\overline{RS}) \geq C(\overline{PQ})$$

Par conséquent, C est une fonction énergétique de randonnée.

(§3.2) Proposition 4

C est une fonction économique clino-dépendante, A^{2D} est la mesure de rentabilité 2D associée à C , μ est un chemin de \mathcal{C} d'origine P et d'extrémité Q , ν est un chemin de $P \sim Q$. On suppose A^{2D} définie en μ .

A^{2D} étant définie en μ , l'une au moins des valeurs $\inf_{\eta \in \mathcal{D}_{P \sim Q}} C(\eta)$ et $C(\mu)$ est finie. Si $C(\mu)$ est infinie, $\inf_{\eta \in \mathcal{D}_{P \sim Q}} C(\eta)$ est finie et donc A^{2D} est définie en ν . Si $C(\mu)$ est finie, nous avons puisque μ appartient à $\mathcal{D}_{P \sim Q}$: $\inf_{\eta \in \mathcal{D}_{P \sim Q}} C(\eta) \leq C(\mu)$. Encore une fois, $\inf_{\eta \in \mathcal{D}_{P \sim Q}} C(\eta)$ est finie et donc A^{2D} est définie en ν . D'autre part :

$$A^{2D}(\mu) = \min \{1, [\inf_{\eta \in \mathcal{D}_{P \sim Q}} C(\eta)] / C(\mu)\} = [\inf_{\eta \in \mathcal{D}_{P \sim Q}} C(\eta)] / C(\mu)$$

$$A^{2D}(\nu) = [\inf_{\eta \in \mathcal{D}_{P \sim Q}} C(\eta)] / C(\nu)$$

Par conséquent : $[C(\nu) = C(\mu) \Leftrightarrow A^{2D}(\nu) = A^{2D}(\mu)]$ et $[C(\nu) > C(\mu) \Leftrightarrow A^{2D}(\nu) < A^{2D}(\mu)]$

Remarquons que la proposition 4 tient toujours si nous substituons A^{3D} (§3.3) à A^{2D} dans son énoncé. Par contre, elle ne tient plus si nous substituons $A^{\angle 3D}$ (§3.4) à A^{2D} .

(§3.2) Proposition 5

C est la fonction économique générée par une application δ continue, A^{2D} est la mesure de rentabilité 2D associée à C .

❶ ♦ On peut trouver dans $]-\pi/2, \pi/2[$ un élément θ en lequel δ prend la valeur 1 (définition 4). Nous avons : $\cos(\theta) \cdot \delta(\theta) > 0$. De plus : $\lim_{\alpha \rightarrow -\pi/2} \cos(\alpha) \cdot \delta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \cos(\alpha) \cdot \delta(\alpha) = 0$. En définitive, comme δ est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$, il existe un élément β de $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que :

$$\cos(\beta) \cdot \delta(\beta) = \max_{\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[} \delta(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \neq 0$$

♦ À tout chemin \overline{PQ} de \mathcal{C} nous associons un chemin noté \overline{PQ}^β .

Soit R le point de \mathcal{D}_Q tel que : $\angle \overline{PR} = \beta$. Par définition, \overline{PQ}^β est le chemin \overline{PR} .

Observons que \overline{PQ}^β appartient à $\mathcal{D}_{P \sim Q}$. D'autre part :

$$C(\overline{PQ}^\beta) = C(\overline{PR}) = x_{\overline{PR}} / [\cos(\angle \overline{PR}) \cdot \delta(\angle \overline{PR})] = x_{\overline{PR}} / [\cos(\beta) \cdot \delta(\beta)] = x_{\overline{PQ}} / [\cos(\beta) \cdot \delta(\beta)]$$

❷ Nous allons montrer ici que : $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \Rightarrow [p_n]$. Où $[p_n]$ désigne la proposition définie par :

[p_n] Soit $(P_i)_{i \in 1..n}$ une suite de n points de l'espace.

Si $\overline{P_i}^{i \in 1..n}$ et $\overline{P_1 P_n}$ appartiennent à \mathcal{C} alors : $C(\overline{P_i}^{i \in 1..n}) \geq C(\overline{P_1 P_n}^\beta)$

→ Démontrons $[p_2]$.

Soit $\overline{P_1 P_2}$ un élément de \mathcal{C} .

$$C(\overline{P_1 P_2}) = x_{\overline{P_1 P_2}} / [\cos(\angle \overline{P_1 P_2}) \cdot \delta(\angle \overline{P_1 P_2})] \geq x_{\overline{P_1 P_2}} / [\cos(\beta) \cdot \delta(\beta)] = C(\overline{P_1 P_2}^\beta)$$

→ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrons que si $[p_m]$ est vraie pour tout élément m de $2..n$ alors $[p_{n+1}]$ est vraie aussi. Soit donc $\overline{P_i^{i \in 1..n+1}}$ un chemin de \mathcal{C} tel que : $\overline{P_1 P_{n+1}} \in \mathcal{C}$.

♦ Considérons tout d'abord le cas où : $\exists j \in 2..n / (\overline{P_1 P_j} \in \mathcal{C} \text{ et } \overline{P_j P_{n+1}} \in \mathcal{C})$

Nous avons : $C(\overline{P_i^{i \in 1..n+1}}) = C(\overline{P_i^{i \in 1..j}}) + C(\overline{P_i^{i \in j..n+1}})$

D'après $[p_j]$ et $[p_{n+2-j}]$: $C(\overline{P_i^{i \in 1..n+1}}) \geq C(\overline{P_1 P_j}^\beta) + C(\overline{P_j P_{n+1}}^\beta)$. D'où :

$C(\overline{P_i^{i \in 1..n+1}}) \geq x_{\overline{P_1 P_j}} / [\cos(\beta) \cdot \delta(\beta)] + x_{\overline{P_j P_{n+1}}} / [\cos(\beta) \cdot \delta(\beta)] \geq x_{\overline{P_1 P_{n+1}}} / [\cos(\beta) \cdot \delta(\beta)] = C(\overline{P_1 P_{n+1}}^\beta)$

La seconde inégalité découle du fait que : $x_{\overline{P_1 P_j}} + x_{\overline{P_j P_{n+1}}} \geq x_{\overline{P_1 P_{n+1}}}$ (inégalité triangulaire).

♦ Considérons maintenant le cas particulier où : $\forall j \in 2..n, (\overline{P_1 P_j} \notin \mathcal{C} \text{ ou } \overline{P_j P_{n+1}} \notin \mathcal{C})$

$\overline{P_1 P_2}$ appartient alors nécessairement à $\mathcal{D}_{P_1} \sim \mathcal{D}_{P_{n+1}}$. D'où : $\overline{P_1 P_2}^\beta = \overline{P_1 P_{n+1}}^\beta$.

Or : $C(\overline{P_i^{i \in 1..n+1}}) \geq C(\overline{P_1 P_2})$. Donc d'après $[p_2]$: $C(\overline{P_i^{i \in 1..n+1}}) \geq C(\overline{P_1 P_2}^\beta) = C(\overline{P_1 P_{n+1}}^\beta)$

♦ Nous avons dans tous les cas : $C(\overline{P_i^{i \in 1..n+1}}) \geq C(\overline{P_1 P_{n+1}}^\beta)$

Par conséquent, si $[p_m]$ est vraie pour tout élément m de $2..n$ alors $[p_{n+1}]$ est vraie aussi.

→ Nous venons de démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \Rightarrow [p_n]$

③ Soit (P, Q) un couple de points de l'espace.

→ Si \overline{PQ} est un chemin de \mathcal{C} alors : $\forall v \in \mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q, C(v) \geq C(\overline{PQ}^\beta)$.

Cela découle immédiatement de ce que nous venons de démontrer dans la partie ②. D'où :

$$\inf_{v \in \mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q} C(v) = C(\overline{PQ}^\beta) = x_{\overline{PQ}} / [\cos(\beta) \cdot \delta(\beta)] = x_{\overline{PQ}} / \max_{\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[} \cos(\alpha) \cdot \delta(\alpha) \neq +\infty$$

→ Si \overline{PQ} n'est pas un chemin de \mathcal{C} (autrement dit, si les droites \mathcal{D}_P et \mathcal{D}_Q sont confondues) alors pour tout élément n de \mathbf{N}^* il existe un point R_n n'appartenant pas à \mathcal{D}_P et un point Q_n appartenant à \mathcal{D}_P tels que : $(\angle_{\overline{P R_n}} = \beta \text{ et } x_{\overline{P R_n}} = 1/n)$ et $\angle_{\overline{R_n Q_n}} = \beta$

$\overline{P R_n Q_n}$ est un chemin de $\mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q$. D'autre part :

$$\begin{aligned} C(\overline{P R_n Q_n}) &= C(\overline{P R_n}) + C(\overline{R_n Q_n}) \\ &= x_{\overline{P R_n}} / [\cos(\beta) \cdot \delta(\beta)] + x_{\overline{R_n Q_n}} / [\cos(\beta) \cdot \delta(\beta)] = 2 / [n \cdot \cos(\beta) \cdot \delta(\beta)] \end{aligned}$$

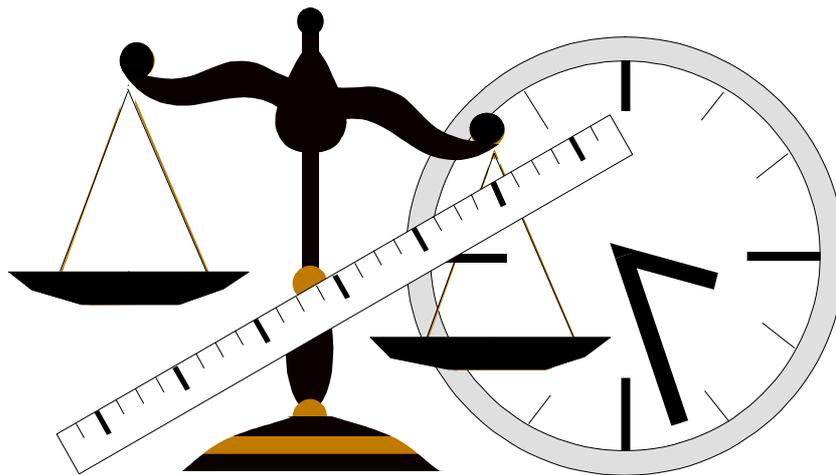
D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} C(\overline{P R_n Q_n}) = 0$. Et donc : $\inf_{v \in \mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q} C(v) = 0$

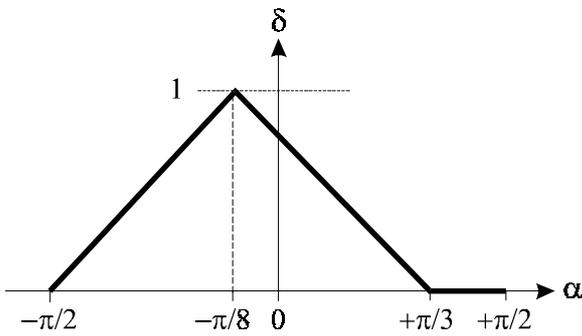
→ Dans tous les cas $\inf_{v \in \mathcal{D}_P \sim \mathcal{D}_Q} C(v)$ est une valeur finie.

Il en résulte que A^{2D} est partout définie.

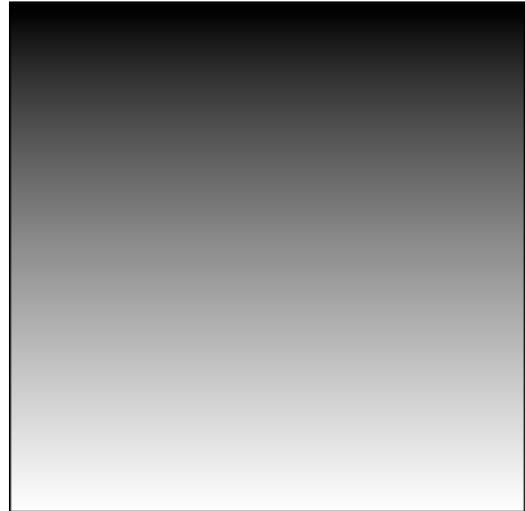
ANNEXE B

Tables de résultats





génératrice de la fonction économique



MNT (pente 45°)

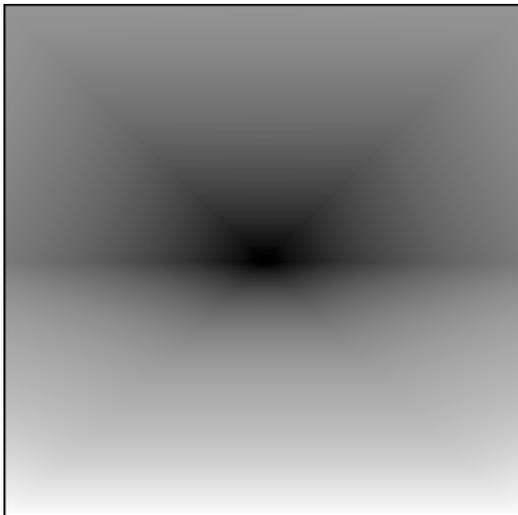
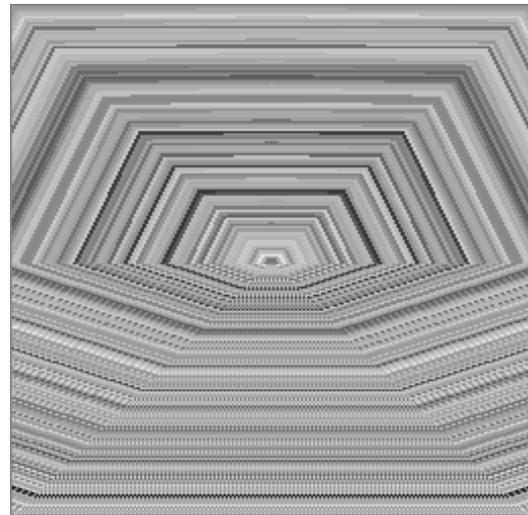
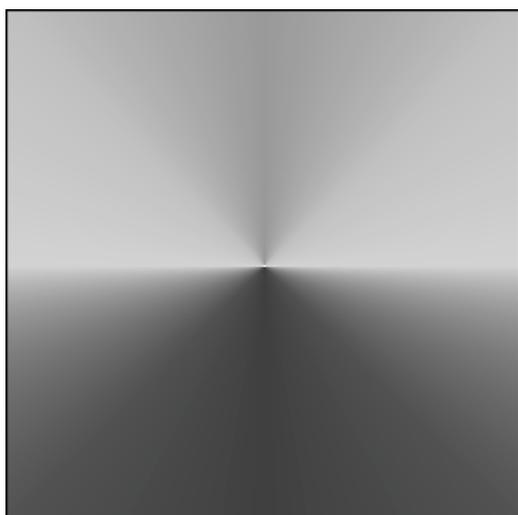


image des moindres coûts

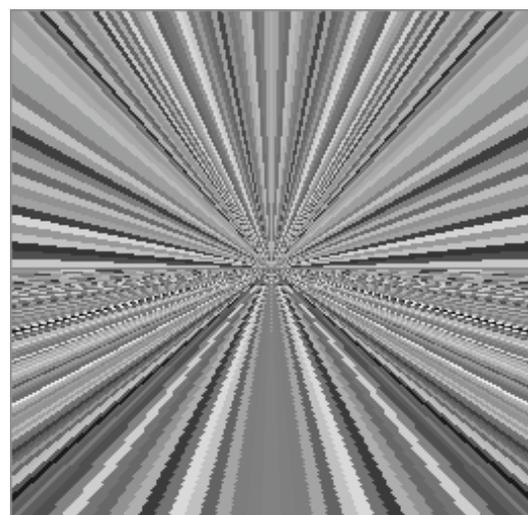


(LUT aléatoire)



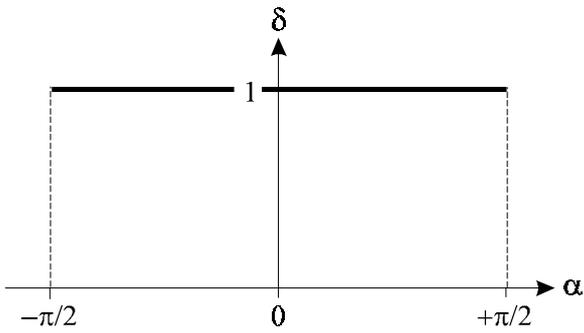
(rentabilité minimale : 0.15)

image des rentabilités

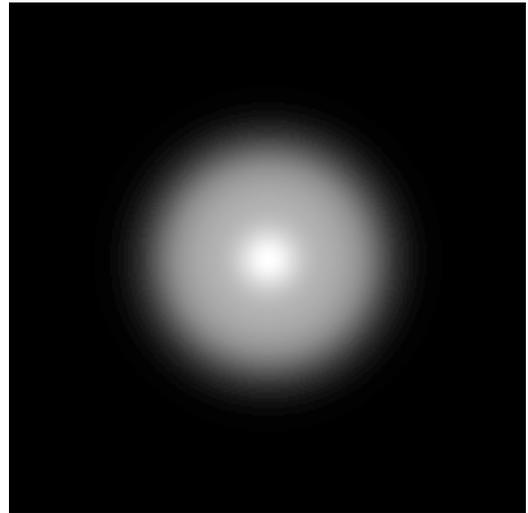


(LUT aléatoire)

table 1. Plan incliné.
Coûts et rentabilités sont exprimés selon le point central.



génératrice de la fonction économique



MNT (altitude du sommet : 120 niveaux de gris)

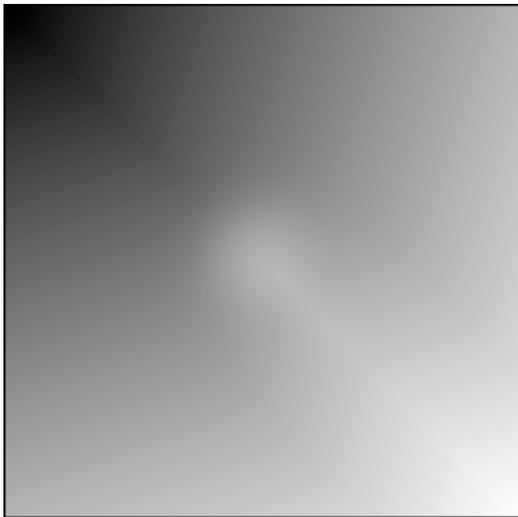
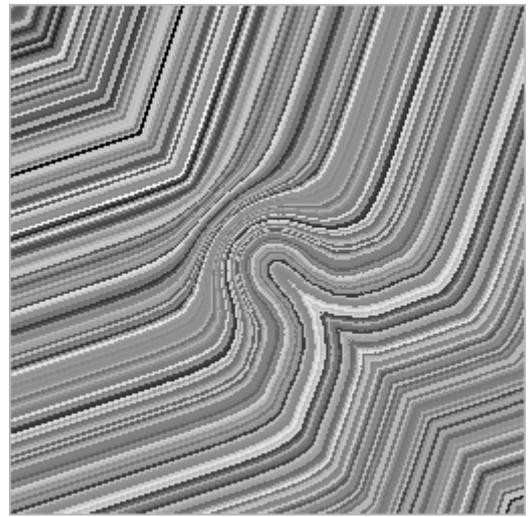


image des moindres coûts

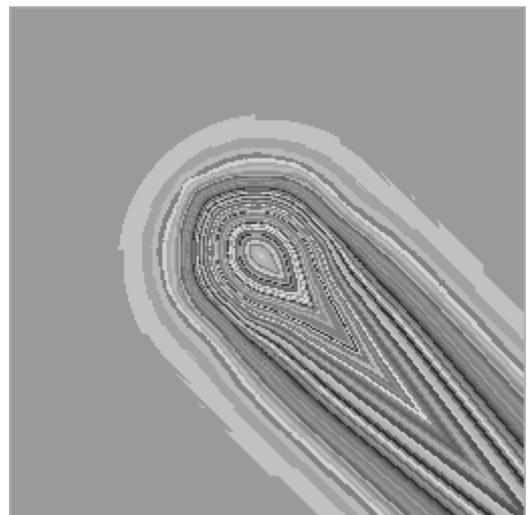


(LUT aléatoire)



(rentabilité minimale : 0.67)

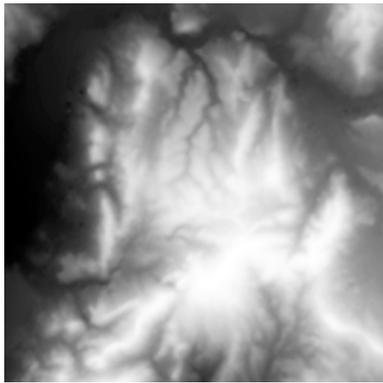
image des rentabilités



(LUT aléatoire)

table 2. *Colline gaussienne.*

Coûts et rentabilités sont exprimés selon le coin supérieur gauche de l'image.



MNT
(histogramme égalisé
surface couverte : 100 km²
dénivelé total : 600 m)

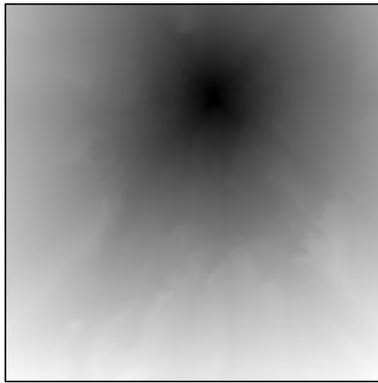
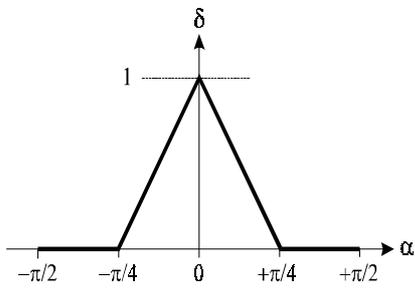


image des moindres coûts



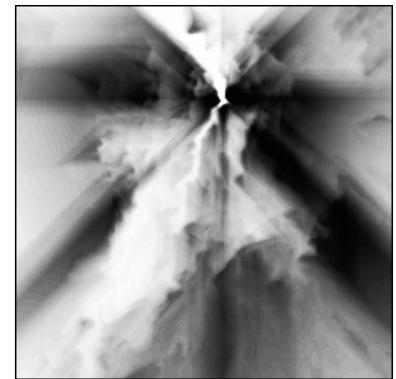
image des rentabilités
(rentabilité minimale : 0.45)



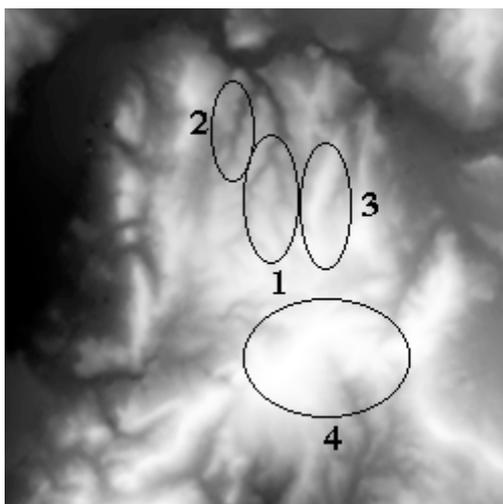
génératrice
de la fonction économique



(LUT aléatoire)



(histogramme égalisé)



MNT

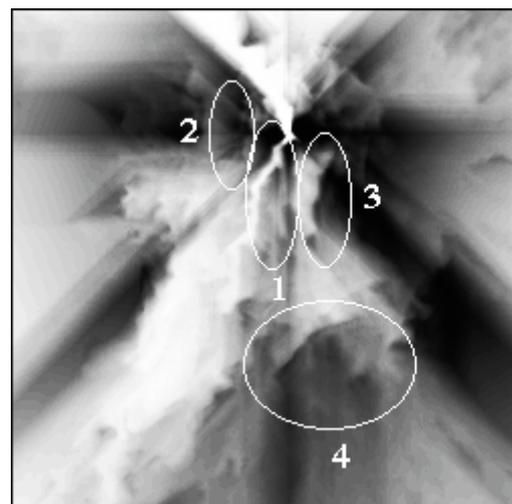


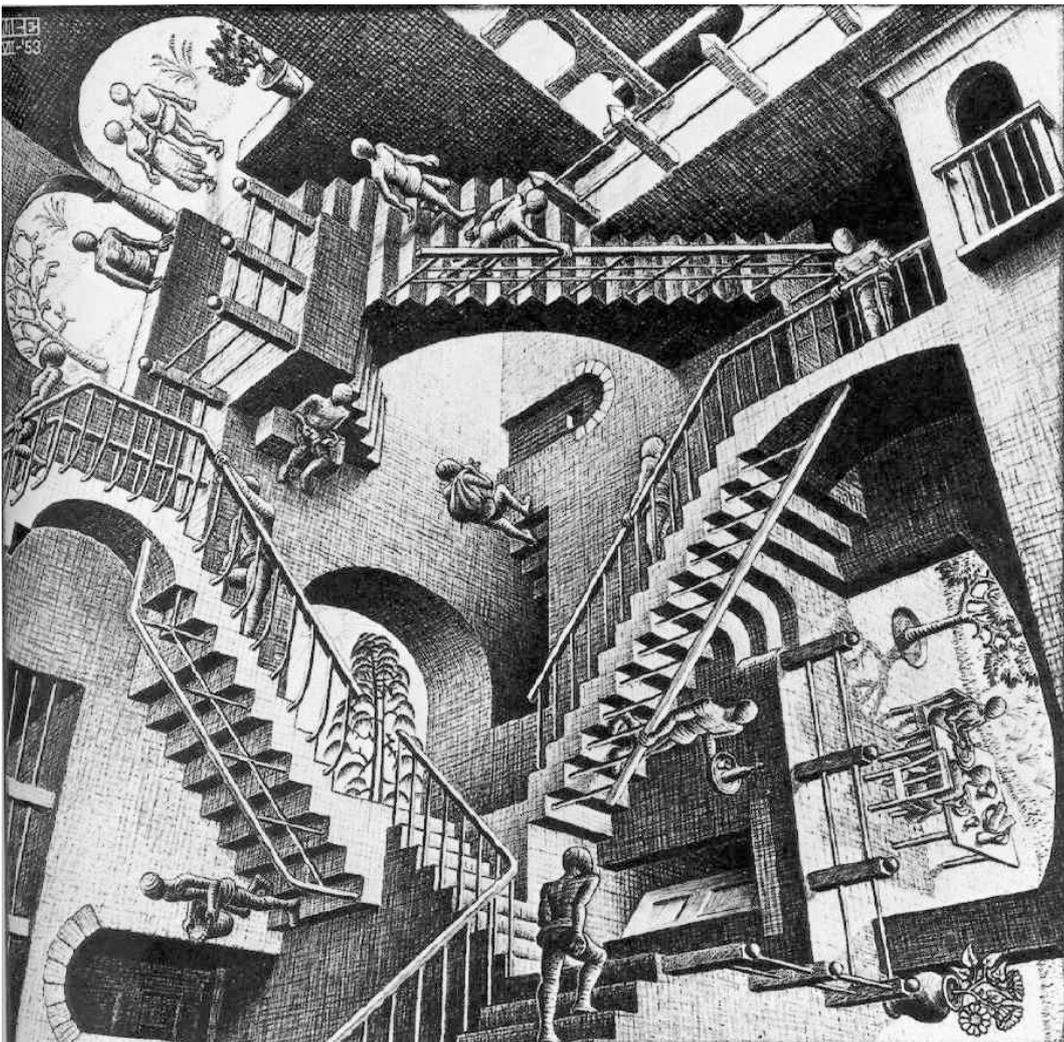
image des rentabilités

table 3. *Mont Ventoux.*

Coûts et rentabilités sont exprimés selon un point situé au milieu de la partie supérieure de l'image.

CHAPITRE II

F-histogrammes *concept et applications*



M.C. Escher's "Relativity" © 1997 Cordon Art - Baarn - Holland. All rights reserved.

INTRODUCTION

CONCEPT

APPLICATIONS

CONCLUSION

ANNEXES



1. Introduction

1.1. Sur la position relative d'objets 2D

Savoir appréhender l'organisation spatiale d'objets bidimensionnels est essentiel dans le domaine de la vision par ordinateur : après une phase de segmentation, pour la reconnaissance d'objets à partir de l'identification de leurs composantes... à un niveau supérieur, pour la compréhension d'images, la description de scènes en langage naturel... dans les systèmes d'information géographique, qui peuvent avoir à gérer d'énormes quantités de données, pour la constitution de critères de recherche puissants...



En 1975, Freeman propose, pour décrire la position relative de deux régions dans un espace 2D, une liste de dix relations spatiales ([Free75](#)). Certaines sont rattachées à des concepts mathématiques. Leur étude peut donc largement s'appuyer sur des définitions classiques — même si les incertitudes et imprécisions avec lesquelles il faut composer en traitement d'images incitent à remanier (“fuzzifier”) ces définitions. Citons pour exemples les relations INCLUS_DANS et ADJACENT_À. La première est rattachée à un concept ensembliste, la seconde à un concept topologique. INCLUS_DANS et ADJACENT_À sont étudiées en particulier dans [Rose85](#), [Kris93](#), [Bloc96b](#)... Les quatre relations directionnelles — À_DROITE_DE, À_GAUCHE_DE, AU_DESSUS_DE et AU_DESSOUS_DE (ou À_L'EST_DE, À_L'OUEST_DE, etc.) — sont fondamentalement différentes. Chargées d'ambiguïté, elles nous confrontent à des problèmes qui relèvent non seulement

de l'informatique mais aussi de la psychologie et de la linguistique ([Free75](#), [Retz88...](#)). On peut compter le nombre de composantes connexes d'une région, calculer sa surface, évaluer la distance entre deux régions... Mais dans quelle *mesure* tel objet se trouve-t-il à droite de tel autre ? Les relations directionnelles ont fait l'objet d'assez nombreux travaux. Si aucun ne s'est réellement imposé à ce jour, ils ont permis à tout le moins d'imposer une idée : l'idée selon laquelle la position relative de deux objets peut admettre une représentation propre, et ne pas se décrire forcément en termes de relations spatiales.

□

Il est vite apparu que même en se limitant au traitement de configurations extrêmement élémentaires, dans un contexte très épuré (fig.1), les relations mathématiques classiques — en « tout ou rien » — ne sont pas adaptées à la modélisation des relations directionnelles. Freeman fut l'un des premiers à proposer l'emploi de relations binaires floues ([Free75](#)). Mais comme l'ont souligné en particulier Rosenfeld et Kak ([Rose82](#)), s'il est facile de définir de telles relations entre de simples points (§3.1.1), le problème est autrement plus complexe lorsqu'il s'agit de traiter des objets bidimensionnels et que rentrent en jeu les paramètres forme, orientation, taille, etc. (fig.2).

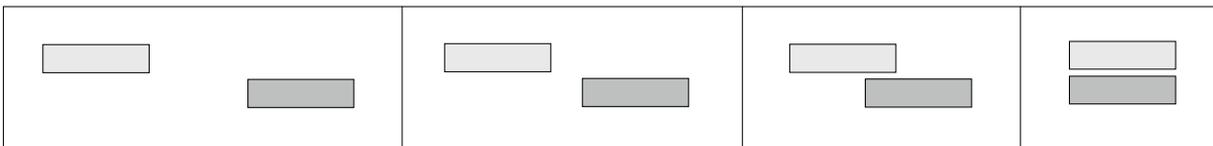


figure 1 (d'après [Wins75](#)). *Comment définir les relations directionnelles ?*

L'objet clair est-il à gauche de l'objet foncé ? Dans le premier cas oui (?), dans le dernier non (?). Mais que dire des situations intermédiaires ?

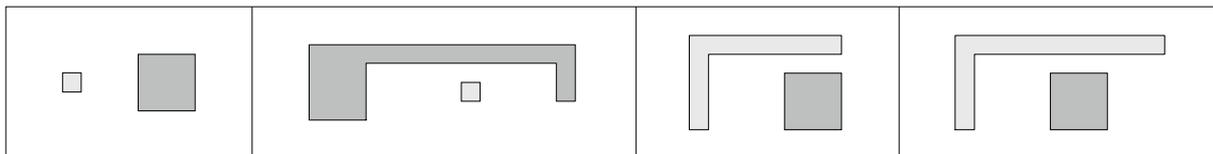


figure 2 (d'après [Rose82](#)). *Comment définir les relations directionnelles ?*

L'objet clair est-il à gauche de l'objet foncé ? Dans le premier cas oui (?). Mais que dire des autres configurations ?

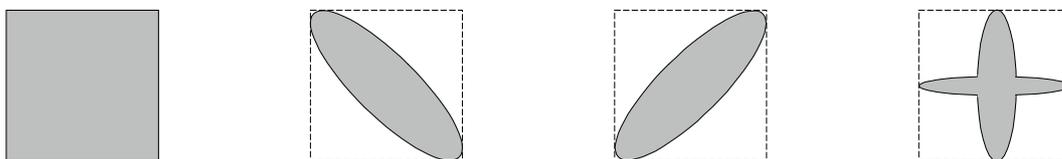


figure 3 (d'après [Miya94b](#)). *Comment définir les relations directionnelles ?*

Des objets ayant les mêmes barycentre et rectangle englobant peuvent-ils pour autant être traités sans distinction ?

Peuquet et Ci-Xiang présentent dans [Peuq87](#) des relations directionnelles entre objets nets polygonaux. L'évaluation de ces relations repose essentiellement sur des considérations mettant en jeu les barycentres et rectangles englobants des objets. Keller et Sztandera traitent plus généralement des relations directionnelles entre objets flous ([Kell90](#)). Mais la manipulation

des objets nets se limite en fait à celle de leurs rectangles englobants. Réduire un objet à quelques paramètres de ce type est évidemment extrêmement pratique, et le procédé a été largement utilisé, notamment dans le cadre du raisonnement spatial ([Dutt91], [Lee92], [Shar95...]). Il est clair toutefois qu'on ne peut espérer définir ainsi des relations très satisfaisantes (fig.3).



Les travaux les plus récents en la matière ([Kris93], [Miya94b], [Kell96...]) se focalisent essentiellement sur le mode d'exploitation d'un histogramme d'angles (définition 10, §5.1). Un tel histogramme constitue une bien meilleure représentation de la position relative de deux objets qu'un couple de barycentres ou de rectangles englobants : il est sensible en effet à la distance qui sépare les objets auxquels il est associé, à la forme, l'orientation, la taille de chacun d'eux ([Miya94b]). Mais son calcul est coûteux ; seules les données "rasters" peuvent être considérées ; certaines directions sont excessivement privilégiées (§5)... D'autre part, l'information métrique n'est pas explicitement prise en compte. Et c'est un réel handicap pour le traitement d'objets bidimensionnels (§5, §8). Nous présentons dans ce chapitre un nouveau concept : celui de *F-histogramme* (ou *histogramme de forces*). Il s'affranchit des faiblesses précédemment évoquées, généralise et supprime celui d'histogramme d'angles. La figure 4 illustre l'idée fondamentale sur laquelle il repose : ramener la manipulation des objets (entités de dimension 2) à celle de leurs sections longitudinales (entités de dimension 1), non pas à celle de points (entités de dimension 0).

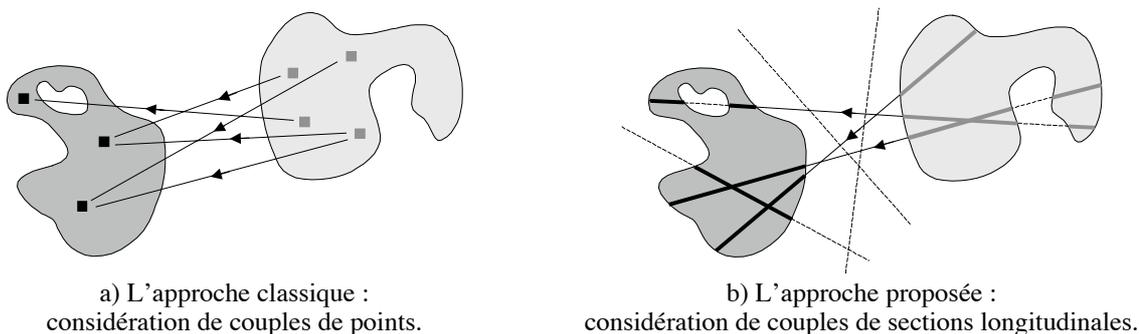


figure 4. Représentation de la position relative de deux objets.

1.2. Pour une bonne lecture de ce chapitre

Le concept de F-histogramme est développé dans les paragraphes §2 à §6. L'approche adoptée est une approche axiomatique fonctionnelle. Une vingtaine de propositions et autant de propriétés parsèment le texte. De nombreuses notations sont introduites, de nombreuses définitions apparaissent. Les démonstrations des propositions sont regroupées à l'annexe A, située en fin de chapitre. Une affirmation accompagnée du symbole ∇ est elle aussi justifiée à l'annexe A. Toutes les propriétés auxquelles il est fait abondamment référence sont consignées à l'annexe B, dont les pages sont rabattables vers l'extérieur du document. La numérotation de ces propriétés s'appuie sur un ordre logicomathématique, et non sur l'ordre d'apparition dans le texte. Ajoutons que l'étude est implicitement réalisée dans le plan affine euclidien \mathcal{P} , rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Enfin, pour tout couple (p,q) de points distincts de \mathcal{P} , $\angle(p,q)$ désigne la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{pq})$.



| | |
|---|-------------------------|
| C | INTRODUCTION |
| O | Présentation sommaire |
| N | Développement théorique |
| C | Aspects pratiques |
| E | Etude comparative |
| P | Extensions |
| T | APPLICATIONS |
| | CONCLUSION |
| | ANNEXES |

2. Présentation sommaire des F-histogrammes

Un F-histogramme est une application de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ chargée de représenter la position relative de deux objets A et B. À une direction θ du plan, cette application associe un poids : le poids de l'ensemble des arguments qui peuvent être invoqués à l'appui de la proposition « A se situe dans la direction θ par rapport à B ». Le calcul de ce poids met en jeu trois fonctions : φ (pour le traitement des couples de points), f (pour le traitement des couples de segments) et F (pour le traitement des couples de sections longitudinales). Dans ce paragraphe §2, nous donnons un aperçu de toutes ces fonctions ainsi qu'un premier exemple de F-histogramme.

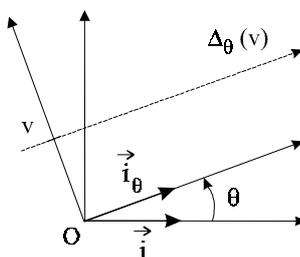


figure 5. Les droites orientées $\Delta_\theta(v)$.

Soit θ et v deux réels quelconques. Nous notons \vec{i}_θ et \vec{j}_θ les images respectives de \vec{i} et \vec{j} par la rotation d'angle θ , $\Delta_\theta(v)$ la droite orientée dont le repère est défini par le vecteur \vec{i}_θ et le point de coordonnées $(0, v)$ — relativement à $(O, \vec{i}_\theta, \vec{j}_\theta)$ — (fig.5).

2.1. La fonction φ

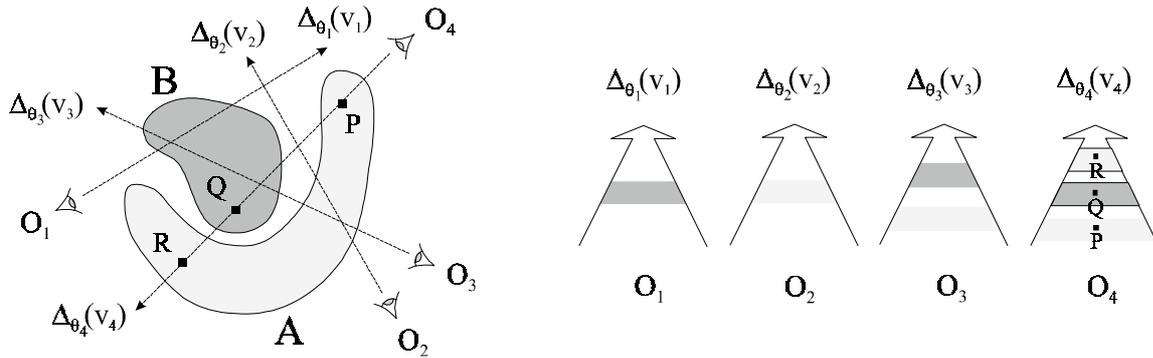


figure 6. Les observateurs rattachés aux droites $\Delta_\theta(v)$.

Pour l'observateur O_4 , (R, Q) constitue un bon argument en faveur de la proposition « A se situe dans la direction θ_4 par rapport à B ». Mais pas (P, Q) : $\varphi(x_P - x_Q) = 0$. Quant aux autres observateurs, ils ne peuvent exhiber aucun argument pour soutenir leurs propositions respectives.

Soit A et B deux objets, θ et v deux réels. Imaginons qu'à la droite orientée $\Delta_\theta(v)$ soit rattaché un observateur (fig.6). Bien que son champ de vision soit limité à $\Delta_\theta(v)$ — ou peut-être à cause de cela —, l'observateur en question soutient que l'objet A se trouve dans la direction θ par rapport à B. Il invoque pour nous convaincre un certain couple (M, N) de points de $\Delta_\theta(v)$, avec M appartenant à A et N à B. Quel poids décidons-nous d'accorder à l'argument constitué par (M, N) ? Désignons par x_M et x_N les abscisses respectives de M et N sur $\Delta_\theta(v)$. Dans la mesure où nous ne voulons privilégier aucune région du plan, ni aucune direction, seule la position relative de M et N sur $\Delta_\theta(v)$ — c'est-à-dire en fait la valeur $\overline{NM} = x_M - x_N$ — peut jouer sur notre décision. Cette dernière est donc prise par l'intermédiaire d'une application φ , de l'espace \mathbf{R} des mesures algébriques, vers l'espace \mathbf{R}_+ des poids : $\varphi(\overline{NM})$, c'est-à-dire $\varphi(x_M - x_N)$, représente le poids de l'argument (M, N) invoqué par l'observateur pour étayer sa thèse. Il est clair que φ est nulle sur \mathbf{R}_- : car si l'abscisse x_M est inférieure à x_N , l'argument (M, N) ne tient pas.

2.2. La fonction f

Reprenons les éléments présentés dans le paragraphe précédent. L'observateur rattaché à la droite orientée $\Delta_\theta(v)$ soutient toujours que l'objet A se trouve dans la direction θ par rapport à B. Pour nous convaincre, il invoque cette fois un couple (I, J) de segments portés par $\Delta_\theta(v)$, avec I inclus dans A et J dans B. Se pose donc à nous la question suivante : quel poids accorder à l'argument constitué par (I, J) ? Soit a_1^0, b_1^0, a_2^0 et b_2^0 , avec a_1^0 inférieur à b_1^0 et a_2^0 inférieur à b_2^0 , les coordonnées — relativement au repère associé à $\Delta_\theta(v)$ — des extrémités des segments I et J (fig.7). Les valeurs $b_1^0 - a_1^0$ et $b_2^0 - a_2^0$ sont tout simplement les longueurs des segments : nous les noterons respectivement d_1 et d_2 . Quant à la valeur $a_1^0 - b_2^0$ elle indique la position relative de I et J

sur $\Delta_\theta(v)$: nous la noterons D_{IJ}^θ . Remarquons que $\Delta_{\theta+\pi}(-v)$ est une autre droite orientée portant I et J. Et : $a_1^\theta - b_j^\theta \neq a_1^{\theta+\pi} - b_j^{\theta+\pi}$ (fig.7). Considérons maintenant la fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ définie par :

$$f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J) = \int_{D_{IJ}^\theta + d_J}^{d_I + D_{IJ}^\theta + d_J} \left(\int_0^{d_J} \varphi(u-w) dw \right) du$$

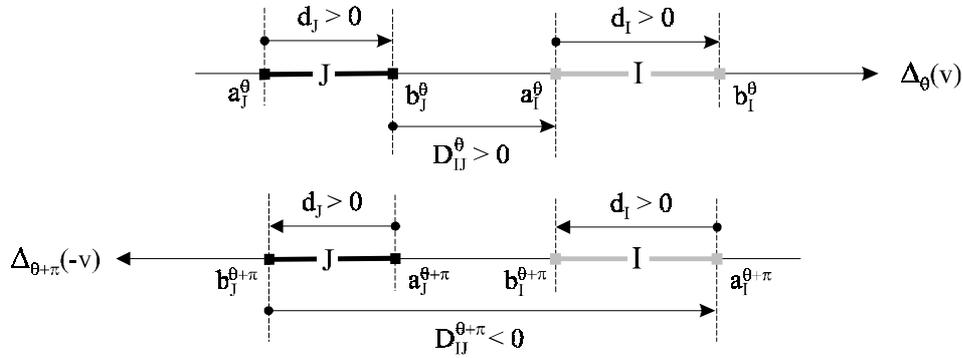


figure 7. Couple de segments alignés. Notations.

Il semble naturel d'accorder à l'argument (I,J) le poids $f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$. Car $f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$ s'obtient en capitalisant les poids $\varphi(x_M - x_N)$ des arguments (M,N) pouvant être invoqués par l'observateur pour étayer sa thèse — où les points M et N décrivent respectivement I et J. En effet :

$$\int_{D_{IJ}^\theta + d_J}^{d_I + D_{IJ}^\theta + d_J} \left(\int_0^{d_J} \varphi(u-w) dw \right) du = \int_{a_i^\theta}^{b_i^\theta} \left(\int_{a_j^\theta}^{b_j^\theta} \varphi(u-w) dw \right) du = \int_{a_j^\theta}^{b_j^\theta} \left(\int_{a_i^\theta}^{b_i^\theta} \varphi(u-w) du \right) dw \quad \forall 1$$

2.3. La fonction F

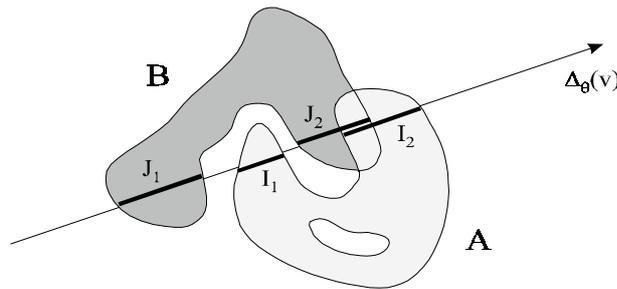


figure 8. Objets quelconques.

On peut s'attendre à ce que l'intersection d'une droite orientée avec un objet quelconque soit non pas un segment, mais plutôt une union de segments (fig.8). Rien d'étonnant par conséquent à ce que l'observateur invoque maintenant un couple (I,J) de parties de $\Delta_\theta(v)$, où I est l'union de segments de A et J l'union de segments de B : $I = \cup_{i \in 1..n} I_i$ et $J = \cup_{j \in 1..m} J_j$. Quel poids accorder à l'argument constitué par (I,J) ? Nous allons tout naturellement capitaliser les poids des arguments (I_i, J_j) , définissant ainsi une fonction F telle que :

$$F(\theta, \cup_{i \in 1..n} I_i, \cup_{j \in 1..m} J_j) = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..m} f(d_{I_i}, D_{I_i J_j}^\theta, d_{J_j})$$

2.4. La fonction F^{AB}

Dans le but d'appréhender la position relative des objets A et B, c'est évidemment toute une armée d'observateurs qu'il nous faut envoyer sur le terrain. Pour un réel θ donné, il existe ainsi une infinité d'observateurs soutenant que A se situe dans la direction θ par rapport à B. Les partisans de cette thèse sont rattachés aux droites $\Delta_\theta(v)$, où v décrit \mathbf{R} . Nous allons accorder à l'ensemble des arguments qu'ils peuvent invoquer le poids $F^{AB}(\theta)$ défini par :

$$F^{AB}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, A \cap \Delta_\theta(v), B \cap \Delta_\theta(v)). dv$$

F^{AB} est donc une fonction de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ . Nous dirons que c'est le *F-histogramme* associé au couple (A,B) d'objets — ou encore l'*histogramme de forces* associé via F à (A,B). Il constitue la synthèse de toutes les informations recueillies auprès des observateurs disséminés dans le plan. Il représente la position relative de A et B.

2.5. Récapitulatif et exemple

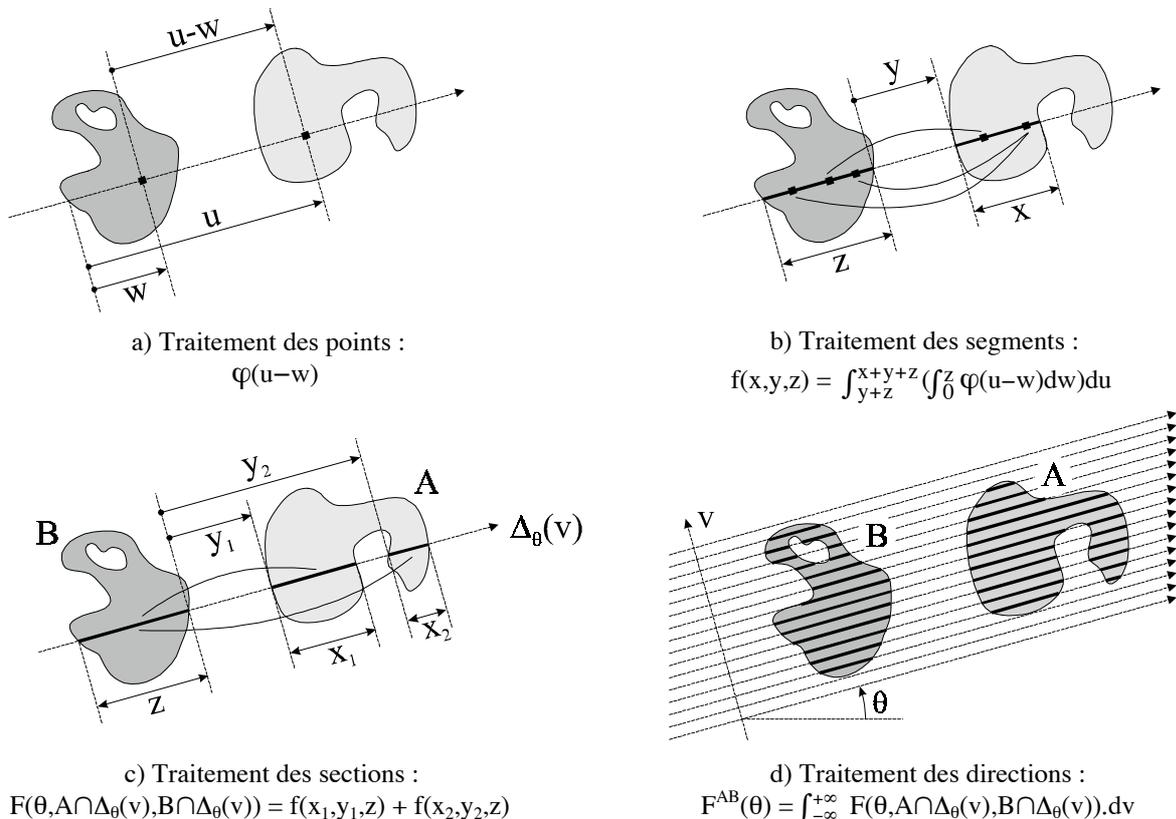


figure 9. Représentation de la position relative d'objets. Schéma de calcul.

Soit A et B deux objets. F^{AB} a été définie à partir de F ; F l'a été à partir de f ; qui elle-même l'a été à partir de φ (fig.9). La représentation F^{AB} de la position relative de A et B dépend donc fondamentalement du choix de la fonction φ . Considérons un élément (M,N) de $A \times B$ et une

droite orientée $\Delta_\theta(v)$ passant par M et N. Revenons à la question première, à savoir : quel poids accorder à l'argument (M,N) invoqué pour soutenir la proposition « A se situe dans la direction θ par rapport à B » ? Le plus simple est de prendre une décision en « tout ou rien ». Autrement dit, d'accorder à l'argument (M,N) un poids nul si x_M est inférieure à x_N , un poids égal à une constante arbitraire sinon (rappelons que x_M et x_N désignent les abscisses respectives de M et N sur $\Delta_\theta(v)$). La fonction φ_0 définie ci-après correspond à ce type de décision :

$$\forall d \in \mathbf{R}, [(d \leq 0 \Rightarrow \varphi_0(d)=0) \text{ et } (d > 0 \Rightarrow \varphi_0(d)=1)]$$

Le F-histogramme de la figure 10b a été calculé en adoptant φ_0 . Sur l'axe des abscisses, l'unité est le radian. La figure 10c a été obtenue en « enroulant » la figure 10b sur un disque : l'axe des abscisses de la figure 10b se confond ainsi avec la circonférence du disque de la figure 10c. Nous abandonnerons généralement la représentation cartésienne classique des histogrammes au profit de cette représentation pseudo-polaire, beaucoup plus éloquente. D'une certaine manière, l'étude d'objets quelconques A et B est donc ramenée à celle d'objets A' et B' très particuliers : B' est un disque, $A' \cap B'$ est inclus dans la circonférence de ce disque, $A' \cup B'$ est étoilé en Ω — où Ω désigne le centre de B'. La dernière propriété signifie que pour tout point M de $A' \cup B'$, le segment $[\Omega M]$ est inclus dans $A' \cup B'$.

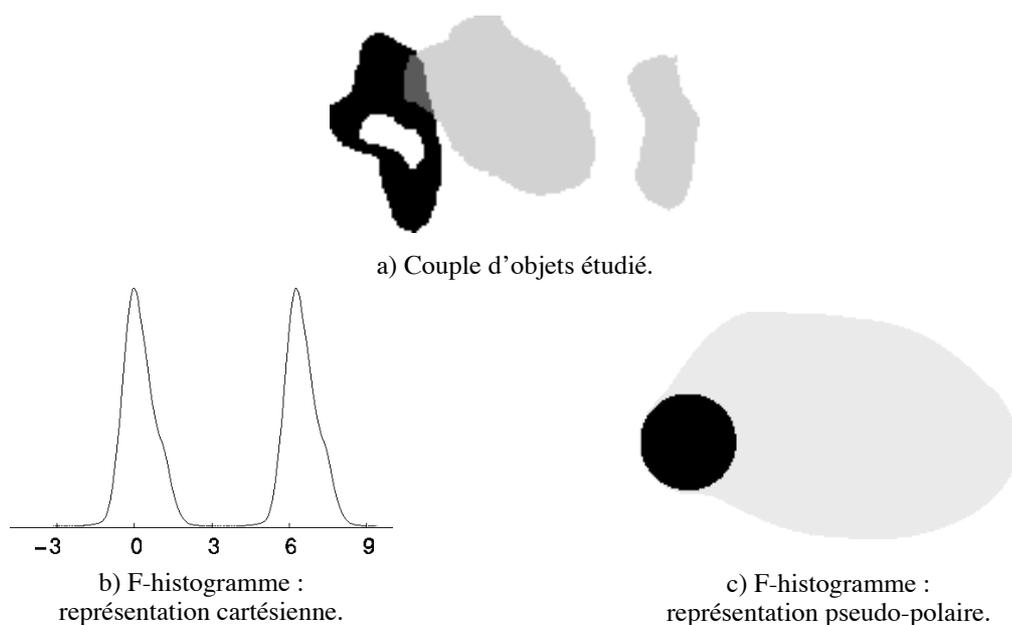


figure 10. Représentation de la position relative d'objets. Exemple.

3. Développement théorique

3.1. De l'évaluation des relations directionnelles vers le traitement des sections longitudinales

L'idée fondamentale développée dans ce chapitre est d'appréhender la position relative de deux objets en étudiant leurs sections longitudinales. Comme la représentation d'une telle position doit permettre à tout le moins d'évaluer les relations directionnelles, il est nécessaire en premier

lieu de se pencher sur ces relations. Dans les paragraphes §3.1.1 et §3.1.2, nous voyons comment définir des relations directionnelles entre de simples points, spécifions le type des objets plus complexes que nous voulons manipuler, puis fixons un cadre axiomatique aux relations directionnelles entre ces objets. Le cadre en question servira de guide pour la recherche des fonctions auxquelles nous voulons déléguer le traitement des sections longitudinales. Nous montrons cela §3.1.3.

3.1.1. Relations directionnelles entre points

La définition de telles relations ne porte pas à controverse.

Tous les auteurs acceptent, pensons-nous, les formulations suivantes.

Définition 1.

Une famille de *relations directionnelles entre points* est une famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de relations binaires floues à laquelle peut être associée une fonction μ de \mathbf{R} vers $[0,1]$, continue, périodique de période 2π , paire, décroissante sur $[0,\pi]$, prenant la valeur 1 en 0 et la valeur 0 en $\pi/2$ (fig.11). Pour tout réel α , \mathcal{R}_α est définie sur exactement l'ensemble des couples (A,B) de points distincts par (fig.12) : $\mathcal{R}_\alpha(A,B) = \mu(\angle(B,A)-\alpha)$. L'on dit du sous-ensemble flou de \mathbf{R} dont la fonction d'appartenance est μ , qu'il représente la famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$.

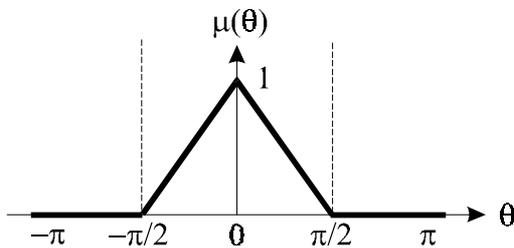


figure 11. Exemple de sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points.

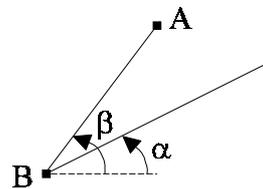


figure 12. Le degré de vérité de la proposition « A est dans la direction α de B » est $\mu(\beta-\alpha)$.

$\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ est assimilé à la valeur de vérité d'une proposition $A \mathcal{R}_\alpha B$ s'énonçant « A est dans la direction α de B ». Le point A est l'*argument* de la proposition, le point B le *référent* (d'autres termes communément employés sont cités dans [Retz88](#)). Pour certaines valeurs de α , et selon le contexte, des conventions particulières sont généralement adoptées. Ainsi, la relation \mathcal{R}_0 est parfois notée À_DROITE_DE, À_L'EST_DE... et la proposition $A \mathcal{R}_0 B$ énoncée « A est à droite de B », « A est à l'est de B »... Miyajima et Ralescu définissent μ par ([Miya94b](#)) : $\forall \theta \in [0,\pi/2]$, $\mu(\theta) = \cos^2(\theta)$. Krishnapuram, Keller et Ma préconisent quant à eux des fonctions trapézoïdales ([Kris93](#)) : $\forall \theta \in [0,\pi/2]$, $(\theta \leq a\pi/2 \Rightarrow \mu(\theta) = 1)$ et $(a\pi/2 < \theta \Rightarrow \mu(\theta) = (\pi - 2\theta)/(\pi - a\pi))$. Dans cette expression, a désigne un élément de $[0,1]$. S'il est nul, μ est triangulaire (fig.11).

3.1.2. Relations directionnelles entre objets

S'il est facile de définir des relations directionnelles entre de simples points, le problème est autrement plus complexe lorsqu'il s'agit de traiter des objets bidimensionnels et que rentrent en

jeu les paramètres forme, orientation, taille... Dans ce paragraphe, nous allons simplement nous interroger sur les propriétés que devrait avoir une famille de relations directionnelles entre objets. Mais il nous faut tout d'abord préciser la nature des objets en question. Et présenter aussi la notion de couple évaluable.

Définition 2.

Soit E un ensemble borné non vide de points du plan, égal à l'adhérence de son intérieur ($\bar{E}=E$). Nous dirons que E est un *objet net* si et seulement si :

pour tout réel θ , pour tout réel v ,
 $E \cap \Delta_\theta(v)$ est l'union d'un nombre fini de segments deux à deux disjoints.

L'ensemble $E \cap \Delta_\theta(v)$ sera noté $E_\theta(v)$: nous dirons que c'est une *section longitudinale* de E (fig.13). Contrairement à la droite $\Delta_\theta(v)$, la section longitudinale $E_\theta(v)$ n'est pas orientée.

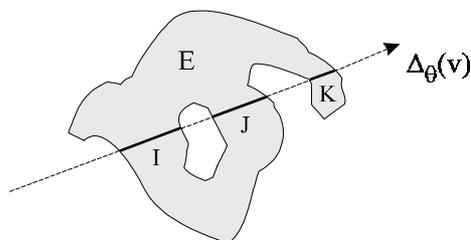


figure 13. Section longitudinale d'un objet net : $E_\theta(v)=I \cup J \cup K$

La condition topologique portant sur E permet de ne considérer que des objets purement bidimensionnels (“regular closed set” [Worb95](#)), ne comportant aucun greffon du type arc ou point isolé. Par la suite, nous omettrons généralement l'adjectif « net » et parlerons tout simplement d'« objets » (les *objets flous* sont définis et étudiés §6.1).

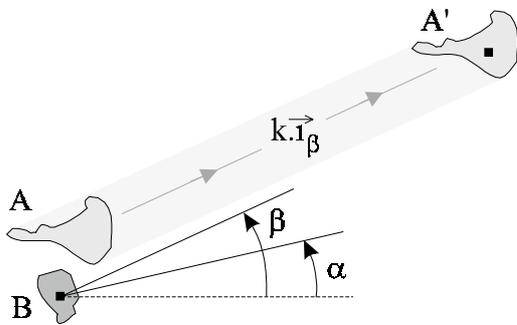
Définition 3.

Soit E un ensemble non vide quelconque et soit $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ une famille de relations binaires floues entre éléments de E . Nous dirons d'un couple (A,B) d'éléments de E que c'est un *couple évaluable* — relativement à la famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ — si et seulement si :

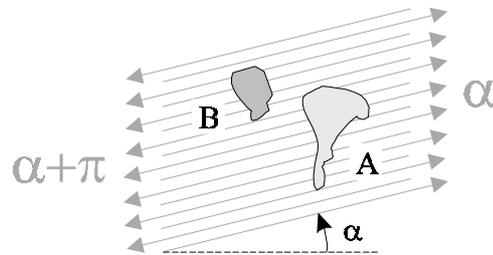
pour tout réel α , \mathcal{R}_α est définie en (A,B) .

Considérons une famille de relations directionnelles entre points, représentée par un sous-ensemble flou de fonction d'appartenance μ . L'ensemble des couples évaluables relativement à une telle famille est l'ensemble des couples de points distincts. Considérons d'autre part une famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de relations binaires floues entre objets nets. Nous reprendrons les terminologie et notations adoptées §3.1.1. Pour que $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ puisse correspondre à une famille de relations spatiales directionnelles, il semble légitime qu'elle partage avec μ la propriété [A1] et possède les propriétés [A2] à [A4] :

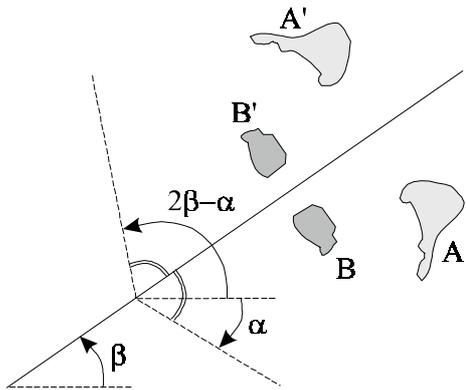
- [A1] Soit A et B deux objets nets, α et β deux réels. Notons $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur \vec{u} . Il existe un réel k_0 tel que : pour toute valeur de k supérieure à k_0 , le couple $(t_{k \cdot \vec{i}_\beta}(A), B)$ est évaluable. De plus : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_\alpha(t_{k \cdot \vec{i}_\beta}(A), B) = \mu(\beta - \alpha)$
- [A2] Soit A et B deux objets nets, α un réel. Si (A, B) est évaluable, (B, A) l'est également et : $\mathcal{R}_{\alpha+\pi}(B, A) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$
- [A3] Soit A et B deux objets nets, α un réel, sym une réflexion d'axe $\Delta_\beta(v)$. Si (A, B) est évaluable, $(\text{sym}(A), \text{sym}(B))$ l'est également et : $\mathcal{R}_{2\beta-\alpha}(\text{sym}(A), \text{sym}(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$
- [A4] Soit A et B deux objets nets, α un réel, hom une homothétie du plan de rapport strictement positif. Si (A, B) est évaluable, $(\text{hom}(A), \text{hom}(B))$ l'est également et : $\mathcal{R}_\alpha(\text{hom}(A), \text{hom}(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$



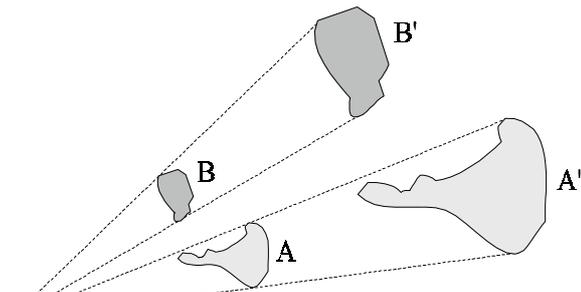
[A1] À peu de chose près, A' est situé par rapport à B comme le centre de A' est situé par rapport au centre de B. Et c'est d'autant plus vrai que k est grand.



[A2] B est dans la direction $\alpha + \pi$ de A comme A est dans la direction α de B.



[A3] A' est dans la direction $2\beta - \alpha$ de B' comme A est dans la direction α de B.



[A4] A' est situé par rapport à B' comme A est situé par rapport à B.

figure 14. Les propriétés axiomatiques fondamentales.

Nous parlerons désormais des propriétés axiomatiques fondamentales (fig.14). [A1] exprime que deux objets peuvent être assimilés à des points s'ils sont suffisamment distants. [A2] met en avant la notion d'inverse sémantique (selon Free75). Ainsi, A est à gauche de B de la même manière que B est à droite de A. Les rôles de référent et argument sont donc facilement interchangeables. [A3] et [A4] définissent le comportement des relations directionnelles vis-à-vis

des similitudes. [A3] exprime qu'aucune dimension de l'espace n'est privilégiée, aucune direction non plus. [A4] que les relations sont insensibles aux changements d'échelle. Notons que de [A3] nous pouvons déduire [P27] \forall^2 :

[P27] Soit A et B deux objets nets, α un réel, t une translation du plan, r une rotation d'angle β . Si (A,B) est évaluable, (t(A),t(B)) et (r(A),r(B)) le sont également. De plus :

$$\mathcal{R}_\alpha(t(A),t(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A,B) \text{ et } \mathcal{R}_{\beta+\alpha}(r(A),r(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A,B)$$

Comme on peut l'observer en parcourant la littérature (notamment les articles de Freeman  Free75 et Retz-Schmidt  Retz88), les points de vue qui viennent d'être exprimés sont globalement rejetés par les travaux menés dans les domaines de la linguistique et de la psychologie. Il a été établi par exemple que les propositions « A est au-dessus de B » et « B est au-dessous de A » ne sont pas perçues de manière strictement identique. Car entre deux objets, le rôle de référent est plus volontiers attribué à celui qui est perceptuellement proéminent. Entre les deux directions *haut* et *bas*, l'homme privilégie la première : sans doute parce que la partie de l'espace directement observable est située au-dessus du sol. Les trois dimensions n'ont pas non plus le même statut. Ainsi, *haut-bas* est la dimension primaire : elle est définie par les lois de la pesanteur et l'homme ne peut s'y mouvoir librement. La dimension secondaire est *avant-arrière* : le corps humain étant asymétrique dans cette dimension, l'homme distingue plus facilement l'*avant* de l'*arrière* que la *gauche* de la *droite*. Dans  Wins75, Winston a proposé des relations À_DROITE_DE et À_GAUCHE_DE n'observant pas [A2]. Mais ce type de proposition est isolé et les points de vue simplificateurs exprimés par les propriétés axiomatiques fondamentales, même s'ils s'opposent aux considérations linguistiques et psychologiques courantes, sont — de façon plus ou moins explicite — largement adoptés par les informaticiens ( Peuq87,  Kocz88,  Kell90,  Kris93,  Miya94a...). Il faut bien s'accommoder à notre compréhension limitée des mécanismes de la perception humaine. Notons enfin que choisir les relations directionnelles parmi les relations binaires, c'est les supposer insensibles au contexte : comme si la position relative de deux objets n'était pas du tout affectée par le reste de la scène. Là encore, c'est un point de vue simplificateur d'informaticien.

3.1.3. *Traitement des sections longitudinales : la fonction F*

Présentation

Soit T l'ensemble des triplets $(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$ où θ et v décrivent \mathbf{R} et A et B décrivent l'ensemble des objets nets du plan. Rappelons que $A_\theta(v)$ est une section longitudinale de A (§3.1.2, définition 2) : $A_\theta(v) = A \cap \Delta_\theta(v)$. De même : $B_\theta(v) = B \cap \Delta_\theta(v)$. L'idée fondamentale développée dans ce chapitre est d'appréhender la position relative de deux objets en étudiant leurs sections longitudinales. Plus précisément, comment définir une fonction F de T vers \mathbf{R}_+ de telle sorte que pour tout couple (A,B) d'objets, l'ensemble $\{(\Delta_\theta(v), F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)))\}_{(\theta,v) \in \mathbf{R}^2}$ de données puisse représenter la position de A par rapport à B ? Pour répondre à cette question, nous allons considérer $F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$ comme un poids : le poids des arguments qu'un observateur dont le champ de vision est limité à $\Delta_\theta(v)$ peut néanmoins trouver pour soutenir la proposition « A est dans la direction θ de B ». Cet aspect sémantique de notre cheminement, nous l'avons fait ressortir dès le paragraphe §2, dans le but d'éclairer l'aspect formel sur lequel nous allons nous étendre maintenant. Car c'est aussi — et surtout — en nous appuyant sur les propriétés axio-

matiques fondamentales [A1] à [A4] que nous allons aborder le problème posé. L'approche est naturelle, puisque la représentation d'une position relative doit permettre à tout le moins d'évaluer les relations directionnelles. En l'adoptant, nous pourrions non seulement apporter une réponse à la question précédente, mais aussi définir de nouvelles familles de relations directionnelles, qui s'inscrivent stricto sensu dans le cadre axiomatique fixé §3.1.2. Nous pourrions comprendre, contrôler le fonctionnement de ces familles, et en fin de compte, jeter un regard distancié sur leur univers.

↪ Axiomatique

Dans un premier temps, quatre propriétés sont imposées à F : [P11], [P12], [P13] et [P14]. Le lecteur trouvera l'énoncé de ces propriétés à l'annexe B : nous l'invitons à rabattre la page concernée vers l'extérieur du document.



[P13] et [P14] sont induites respectivement de [A2] et [A3]. Elles en sont d'ailleurs clairement le reflet. [P14] exprime en particulier que la valeur $F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$ ne dépend pas du choix des repères. Elle est équivalente^{v3} à [P24] :

[P24] Soit (θ, I, J) un élément de T , t une translation du plan, r une rotation d'angle β .
Si F est définie en (θ, I, J) alors elle l'est en $(\theta, t(I), t(J))$ et $(\beta + \theta, r(I), r(J))$. De plus :
 $F(\theta, t(I), t(J)) = F(\theta, I, J)$ et $F(\beta + \theta, r(I), r(J)) = F(\theta, I, J)$



[P14] a la vocation de garantir [A3].

Il paraît tout aussi légitime, pour garantir [A4], d'exiger de F la propriété [P26] :

[P26] Soit (θ, I, J) un élément de T , hom une homothétie de rapport k strictement positif. Si F est définie en (θ, I, J) alors elle l'est en $(\theta, hom(I), hom(J))$ et :
 $F(\theta, hom(I), hom(J)) = F(\theta, I, J)$

Bien qu'elle conduise à des résultats particulièrement intéressants, nous n'aurons pas cette exigence ici. Car il s'avère facile de relâcher [P26] tout en garantissant encore [A4]. Nous reviendrons longuement sur ce point dans les sections suivantes.



Venons-en à [P11] et [P12]. Elles permettront de garantir [A1]. Comme l'illustrent les figures 15 et 16, [P11] s'attache plus au *comment* (comment se prononcer sur la position relative d'objets ?), [P12] au *sur quoi* (sur quelles configurations est-il possible de se prononcer ?). Une interprétation de l'inégalité $F(\theta, I', J') \leq F(\theta, I, J)$ (qui apparaît dans [P12]) est la suivante : les sections I' et J' étant incluses respectivement dans I et J , la proposition « I' est dans la direction θ de J' » ne peut pas être plus appuyée que la proposition « I est dans la direction θ de J ». Notons que dans [P11], le quantificateur existentiel peut être remplacé — sans incidences — par le quantificateur universel. Et d'après [P12], si I et J sont deux segments disjoints alignés — dégénérés ou non — alors F est définie en (θ, I, J) , (θ, I, \emptyset) , (θ, \emptyset, J) et $(\theta, \emptyset, \emptyset)$ (en effet, \emptyset et I sont inclus dans I , \emptyset et J dans J).

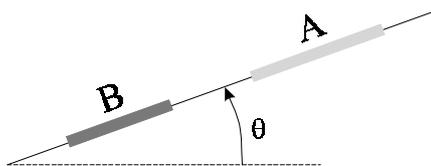


figure 15. La propriété [P11].

On peut se prononcer sur la position relative des objets A et B :
 A est dans la direction θ de B, B n'est pas dans la direction θ de A.



figure 16. La propriété [P12].

On peut se prononcer sur la position relative des objets A et B.
 On pourra donc se prononcer sur celle des objets A' et B'.

3.2. Du traitement des sections longitudinales au traitement des points, et vice-versa

La fonction F introduite §3.1.3 permet de ramener la manipulation des objets nets à celle de leurs sections longitudinales. Nous voyons ici que F délègue le traitement des segments qui composent ces sections à une nouvelle fonction f. Elle-même fait appel à une application φ . Les liens entre F, f et φ sont minutieusement étudiés et une famille importante de fonctions F/f/ φ est présentée.

3.2.1. Traitement des segments : la fonction f

Proposition 1⇐.

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ .

SI F possède les propriétés [P11] à [P14]

ALORS il existe une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ telle que f et F se partagent [P9].
 Et cette fonction f possède [P3] et [P4].

Rappelons une dernière fois que toutes les propriétés auxquelles il est fait référence dans ce chapitre sont consignées à l'annexe B. D'autre part, pour la lecture de [P9], les notations d_I , D_{II}^0 , etc., ont été introduites §2.2.

L'ensemble T n'est pas commode à manipuler. La proposition 1⇐ ouvre une brèche dans cet handicap, puisqu'elle autorise l'assimilation d'une partie de T à une partie de \mathbf{R}^3 , ensemble beaucoup plus sympathique. Le pont entre T et \mathbf{R}^3 est jeté par les triplets (θ, I, J) de T dont les composantes I et J correspondent à des segments. Dans le cas général, I et J ne sont pas des segments. Mais il existe un ensemble $\{I_i\}_{i \in 1..n}$ de segments deux à deux disjoints, et un seul, tel

que : $I = \cup_{i \in 1..n} I_i$. Il existe de même un ensemble $\{J_j\}_{j \in 1..m}$ tel que : $J = \cup_{j \in 1..m} J_j$. Nous sommes donc tentés de mettre définitivement à bas le handicap évoqué plus haut en exprimant $F(\theta, I, J)$ selon les $F(\theta, I_i, J_j)$, c'est-à-dire les $f(d_{I_i}, D_{I_i J_j}^\theta, d_{J_j})$.

Sommer ces valeurs constitue le moyen le plus trivial d'opérer, et nous nous en tiendrons à lui (nous reviendrons malgré tout sur ce point §6.3). Dans le paragraphe §3.1.3 nous avons incité le lecteur à considérer $F(\theta, I, J)$ comme un poids. Le moyen adopté pour ramener le traitement des sections longitudinales au traitement de segments se prête bien à cette interprétation : si l'observateur rattaché à la droite $\Delta_\theta(v)$ trouve un nouvel argument en faveur de la proposition « A est dans la direction θ de B », alors le poids de cet argument vient tout simplement s'ajouter au poids des arguments déjà invoqués. Nous imposons donc à F une nouvelle propriété : la propriété [P10]. Notons que [P10] implique [P25] ^{v4} :

[P25] Soit (θ, I, J) un élément de T. F est définie en (θ, \emptyset, J) , (θ, I, \emptyset) et $(\theta, \emptyset, \emptyset)$.

De plus : $F(\theta, \emptyset, J) = F(\theta, I, \emptyset) = F(\theta, \emptyset, \emptyset) = 0$

Définition 4.

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ et f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ .

Si F possède la propriété [P10] et partage avec f la propriété [P9], nous dirons que f *génère* F.

Pour des raisons de robustesse, la continuité est une propriété analytique généralement recherchée. Il est légitime ici d'exiger de f qu'elle soit continue en tout point de son domaine de définition. Toujours à ce propos, considérons un élément $(\theta, I \cup J, L)$ de T tel que celui représenté figure 17, fixons toutes les bornes des intervalles I, J et L, excepté b_I^θ , et faisons tendre cette dernière valeur vers a_J^θ . $I \cup J$ va alors « tendre » vers un segment K. Le souci de préserver la continuité s'exprime dans ce cas par :

$$\begin{aligned} \lim_{b_I^\theta \rightarrow a_J^\theta} F(\theta, I \cup J, L) &\stackrel{1}{=} F(\theta, K, L) \\ \text{Or : } \lim_{b_I^\theta \rightarrow a_J^\theta} F(\theta, I \cup J, L) &\stackrel{2}{=} \lim_{b_I^\theta \rightarrow a_J^\theta} [F(\theta, I, L) + F(\theta, J, L)] \\ \lim_{b_I^\theta \rightarrow a_J^\theta} F(\theta, I \cup J, L) &\stackrel{3}{=} \left[\lim_{b_I^\theta \rightarrow a_J^\theta} f(d_I, D_{IL}^\theta, d_L) \right] + f(d_J, D_{JL}^\theta, d_L) \\ \text{D'autre part : } F(\theta, K, L) &\stackrel{4}{=} f(d_K, D_{KL}^\theta, d_L) \end{aligned}$$

Les égalités 3 et 4 découlent de [P9], la 2 de [P10]. En reportant les expressions obtenues dans l'égalité 1 et en exploitant la continuité supposée de f il vient [P5]. Exiger de f cette propriété nous permet d'énoncer une réciproque de la proposition 1 \Leftarrow : à savoir la proposition 1 \Rightarrow .

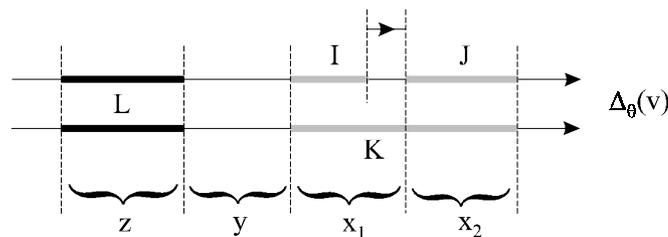


figure 17. La propriété [P5].

Elle découle du souci d'avoir : $\lim F(\theta, I \cup J, L) = F(\theta, K, L)$

Proposition 1 \Rightarrow .

Soit f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ et
soit F la fonction de T vers \mathbf{R}_+ générée par f .

SI f possède les propriétés [P3] à [P5]
ALORS F possède les propriétés [P10] à [P14].

**3.2.2. Traitement des points :
la fonction φ**

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment la fonction F chargée du traitement des sections longitudinales délègue à f le traitement des segments. Nous constatons maintenant que f se décharge à son tour sur une troisième fonction : φ .

Définition 5.

Soit φ une fonction de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ , f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ , E un sous-ensemble de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Si φ , f et E se partagent la propriété [P2], nous dirons que φ *génère* f sur E .

Proposition 2 \Leftarrow .

Soit f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ .

SI f possède [P3] à [P5]
et si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$
ALORS il existe une fonction φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ qui possède [P1]
et génère f sur $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$.

Proposition 2 \Rightarrow .

Soit φ une fonction de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ et
soit f la fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ générée par φ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$.

SI φ possède la propriété [P1]
ALORS f possède les propriétés [P3] à [P5].

3.2.3. Premier récapitulatif $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}} \longrightarrow F \rightleftarrows f \rightleftarrows \varphi$ **De $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ vers F**

Dans l'idée d'appréhender la position relative de deux objets en étudiant leurs sections longitudinales, nous introduisons une fonction F de T vers \mathbf{R}_+ . Compte tenu des propriétés axiomatiques [A1] à [A4] qui sont rattachées aux relations directionnelles entre objets, nous exigeons de F les propriétés [P11] à [P14].

De F vers f

Cette exigence entraîne l'existence d'une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ , possédant [P3] et [P4], et partageant avec F la propriété [P9] (proposition 1 \Leftarrow). Un résultat qui nous incite à adopter

[P10] : le traitement des sections longitudinales est ainsi ramené à celui des segments qui les composent. f génère maintenant F . Et possède — sous une condition légitime de continuité — la propriété supplémentaire [P5].

↳ De f vers φ

Considérons donc une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ vérifiant [P3] à [P5]. Si on lui accorde certaine propriété de différentiabilité, alors il existe une fonction φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ qui possède la propriété [P1] et génère f sur $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$ (proposition 2 \Leftrightarrow).

↳ De φ vers f et de f vers F

Il est possible de « remonter » la chaîne ainsi définie. Une fonction φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ vérifiant [P1] génère en effet sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ une fonction f possédant [P3] à [P5] (proposition 2 \Rightarrow). Et toute fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant [P3] à [P5] génère une fonction F possédant [P10] à [P14] (proposition 1 \Rightarrow). Nous verrons §3.3 comment remonter de F vers $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$.

3.2.4. Des fonctions φ, f et F particulières : les fonctions φ_r, f_r et F_r

↳ Origine

L'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ satisfaisant aux propriétés [P3] à [P5] est évidemment très vaste. Deux cas semblent potentiellement intéressants et retiennent notre attention. Ils sont liés aux propriétés [P7] et [P8]. La particularité de ces dernières tient dans la simplicité de leur interprétation géométrique : [P7] exprime en effet une indépendance vis-à-vis de la distance, [P8] vis-à-vis de l'échelle (fig.18).

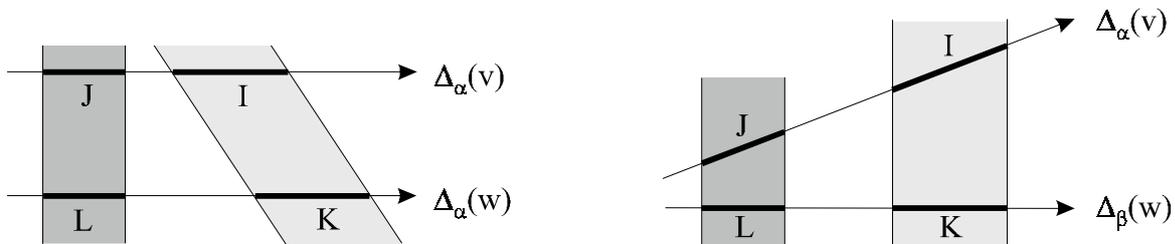


figure 18. Les propriétés [P7] et [P8].

- a) À gauche ([P7]) : $F(\alpha, I, J) = F(\alpha, K, L)$
 b) À droite ([P8]) : $F(\alpha, I, J) = F(\beta, K, L)$

Proposition 3.

Soit f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant [P3] à [P5] et de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$. Il existe (d'après la proposition 2 \Leftrightarrow) une fonction φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ qui possède [P1] et génère f sur $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$.

SI f possède aussi [P7]
 — respectivement [P8] —

ALORS il existe un réel h strictement positif tel que : $\forall d \in \mathbf{R}_+^*, \varphi(d) = h$
 — respectivement : $\forall d \in \mathbf{R}_+^*, \varphi(d) = h/d^2$

Difficile, à leur lecture, de percevoir un lien quelconque entre les propriétés [P7] et [P8]. La proposition 3 nous laisse pourtant penser qu'il en existe un. Les expressions « $\forall d \in \mathbf{R}_+^*, \varphi(d)=h$ » et « $\forall d \in \mathbf{R}_+^*, \varphi(d)=h/d^0$ » sont en effet équivalentes, et la seconde est clairement apparentée à « $\forall d \in \mathbf{R}_+^*, \varphi(d)=h/d^2$ ». Intéressons-nous donc à la famille $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$, où φ_r désigne l'application de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ définie par :

$$\forall d \in \mathbf{R}, [(d \leq 0 \Rightarrow \varphi_r(d)=0) \text{ et } (d > 0 \Rightarrow \varphi_r(d)=1/d^r)]$$

L'étude de cette famille va nous permettre de dégager le lien entre [P7] et [P8].

La fin de la proposition 3 peut se récrire :

| | |
|-------|---|
| SI | f possède aussi [P7] — respectivement [P8] — |
| ALORS | il existe un réel h strictement positif tel que : $\varphi=h.\varphi_0$ — respectivement : $\varphi=h.\varphi_2$. |

Proposition 4 \Rightarrow .

Soit (r,h) un couple de réels, avec h strictement positif. La fonction $h.\varphi_r$ possède la propriété [P1]. Elle génère sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ une fonction f de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$ qui possède non seulement les propriétés [P3] à [P5] (d'après la proposition 2 \Rightarrow) mais aussi [P6]. Plus précisément :

pour tout élément (x,y,z) de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ et pour tout élément k de \mathbf{R}_+^* ,
si f est définie en (x,y,z) alors elle l'est en (kx,ky,kz) et : $f(kx,ky,kz)=k^{2-r}.f(x,y,z)$

Proposition 4 \Leftarrow .

Soit f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant [P3] à [P5] et de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$. Il existe (d'après la proposition 2 \Leftarrow) une fonction φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ qui possède [P1] et génère f sur $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$.

| | |
|-------|---|
| SI | f possède aussi [P6] |
| ALORS | il existe un couple (r,h) de réels, avec h strictement positif, tel que : $\varphi=h.\varphi_r$ |

Considérons maintenant la propriété [P23] :

[P23] Soit x, y, z et k quatre réels positifs, avec y et k non nuls.

Si f est définie en (x,y,z) alors elle l'est en (kx,ky,kz) et : $f(kx,ky,kz) = k^2.f(x,y,z)$

S'il n'y a pas de lien flagrant entre [P7] et [P8], il y en a un entre [P23] et [P8].

Or pour corollaire des propositions 3 et 4, nous avons la proposition 5 :

Proposition 5.

Soit f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant [P3] à [P5] et de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$:

f possède [P7] SI ET SEULEMENT SI f possède [P23]

↪ Caractéristiques

Nous venons d'introduire une famille particulière de fonctions φ : la famille $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$. Ce sont deux de ses membres — à savoir φ_0 et φ_2 — qui nous ont amenés à la considérer. Pour tout réel

r , nous noterons désormais f_r la fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ générée par φ_r sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, et F_r la fonction de T vers \mathbf{R}_+ générée par f_r . f_0 vérifie [P7] et f_2 vérifie [P8], propriétés qui sont à l'origine de notre intérêt pour $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$. De ce paragraphe §3.2.4 nous retiendrons les propositions suivantes.

Proposition 6 \Rightarrow .

Soit (r, h) un couple de réels, avec h strictement positif.

La fonction $h.f_r$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$ et possède les propriétés [P3] à [P6].

D'autre part, $h.f_0$ possède [P7] et $h.f_2$ [P8].

Proposition 6 \Leftarrow .

Soit f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant [P3] à [P5] et de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$.

SI f possède aussi [P6]
— respectivement [P7], [P8] —

ALORS il existe un couple (r, h) de réels, avec h strictement positif, tel que
 f coïncide sur $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$ avec $h.f_r$
— respectivement $h.f_0$, $h.f_2$.

La proposition 6 reprend — en les reformulant — la majorité des résultats déjà énoncés.

Elle stipule en particulier que les fonctions f_r vérifient [P6].

D'après la proposition 7 \Rightarrow ci-après, les F_r vérifient donc [P15].

Proposition 7 \Rightarrow .

Soit f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ et
soit F la fonction de T vers \mathbf{R}_+ générée par f .

SI f possède non seulement [P3] à [P5] mais aussi [P6]

ALORS F possède non seulement [P10] à [P14] (d'après la proposition 1 \Rightarrow) mais aussi [P15].

Proposition 7 \Leftarrow .

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ .

SI F possède non seulement [P10] à [P14] mais aussi [P15]

ALORS il existe une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ qui génère F et possède non seulement [P3] et [P4] (d'après la proposition 1 \Leftarrow) mais aussi [P6].

Une dernière remarque, concernant cette proposition 7 \Leftarrow : sous une condition supplémentaire de continuité (§3.2.1), f possède également [P5], et donc en définitive [P3] à [P6]. Nous aurons maintes fois l'occasion, dans les paragraphes suivants, de justifier l'intérêt que nous portons aux familles $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$, $(f_r)_{r \in \mathbf{R}}$ et $(F_r)_{r \in \mathbf{R}}$.

3.3. Du traitement des sections longitudinales à l'évaluation des relations directionnelles

3.3.1. Traitement des directions : les F-histogrammes

Définition 6.

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ et soit (A,B) un couple d'objets. Considérons la fonction suivante :

$$F^{AB} | \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ \theta \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$$

Si F^{AB} est définie et non nulle sur \mathbf{R} , nous dirons de F^{AB} que c'est le *F-histogramme* associé au couple (A,B) . Et nous dirons de (A,B) que c'est un *couple F-évaluable* d'objets.

Dans le paragraphe §3.1.3 nous suggérions au lecteur de considérer $F(\theta, I, J)$ comme un poids. L'additivité exprimée par [P10] se prêtait bien à cette interprétation : aussi, dans le paragraphe §3.2.1, c'est en imposant [P10] à F que nous ramenions le traitement des sections longitudinales au traitement de segments. De la même manière, la fonction F^{AB} constitue maintenant un moyen naturel de compresser l'ensemble $\{(\Delta_\theta(v), F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)))\}_{(\theta,v) \in \mathbf{R}^2}$ de données (§3.1.3) : $F^{AB}(\theta)$ peut en effet être considéré comme le poids total des arguments émis en faveur de la proposition « A est dans la direction θ de B ». En définitive, c'est donc le *F-histogramme* F^{AB} , et non l'ensemble précédent de données, difficilement manipulable, qui sera chargé de représenter la position relative de A et B . La proposition 8 indique les couples d'objets F_r -évaluables, c'est-à-dire auxquels il est possible d'associer un F_r -histogramme.

Proposition 8

Soit r un réel et (A,B) un couple d'objets.

SI r appartient à $] -\infty, 1[$ ALORS (A,B) est F_r -évaluable.

SI r appartient à $[1, 2[$ ALORS (A,B) est F_r -évaluable si et seulement si $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$.

SI r appartient à $[2, +\infty[$ ALORS si $A \cap B = \emptyset$ alors (A,B) est F_r -évaluable, si $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ alors (A,B) n'est pas F_r -évaluable.

3.3.2. Traitement des F-histogrammes : la fonction H

Un *F-histogramme* est un élément de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$, où $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ dénote l'ensemble des applications de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ périodiques de période 2π . Pour toute application h de ce type et pour tout réel α , nous désignerons désormais par $h \oplus \alpha$ la fonction définie par :

$$h \oplus \alpha | \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ \theta \mapsto h(\theta + \alpha)$$

C'est encore un élément de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$. La proposition $9 \Leftarrow$ ci-après exprime que le traitement des F-histogrammes — pour l'évaluation des relations directionnelles — est assuré par l'intermédiaire d'une application H de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$ (fig.19). La proposition $9 \Rightarrow$ est la dernière pierre de l'édifice que nous avons été amenés à construire : car avec elle, nous sommes maintenant en mesure de définir des familles de relations directionnelles (au sens large décrit §3.1.2).

Définition 7.

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ et soit $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ une famille de relations binaires floues entre objets nets. Si F et $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ se partagent [P19], nous dirons que $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ s'informe par le biais des F-histogrammes.

Définition 8.

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ , H une application de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$, $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ une famille de relations binaires floues entre objets nets. Si F, H et $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ se partagent [P20], nous dirons que F et H génèrent $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$.

Proposition $9 \Leftarrow$.

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ ; $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ une famille de relations binaires floues entre objets nets s'informant par le biais des F-histogrammes ; μ la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points.

SI F possède les propriétés [P10] à [P14],
 SI $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ et μ se partagent [A1],
 ET SI $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ possède [A2] et [A3],
 ALORS il existe une application H de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$
 telle que F et H génèrent $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$.
 Et cette application H possède [P17].

Proposition $9 \Rightarrow$.

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ ; H une application de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$; μ la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points. Soit enfin $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ la famille de relations binaires floues entre objets nets générée par F et H.

SI F possède les propriétés [P10] à [P14] alors il existe une fonction f qui génère F (d'après la proposition $1 \Leftarrow$).
 SI cette fonction f est continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$,
 SI H et μ se partagent [P16],
 ET SI H possède [P17],
 ALORS $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ et μ se partagent [A1]
 et $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ possède [A2] et [A3].
 SI DE PLUS F possède [P15] et H possède [P18]
 ALORS $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ possède aussi [A4].

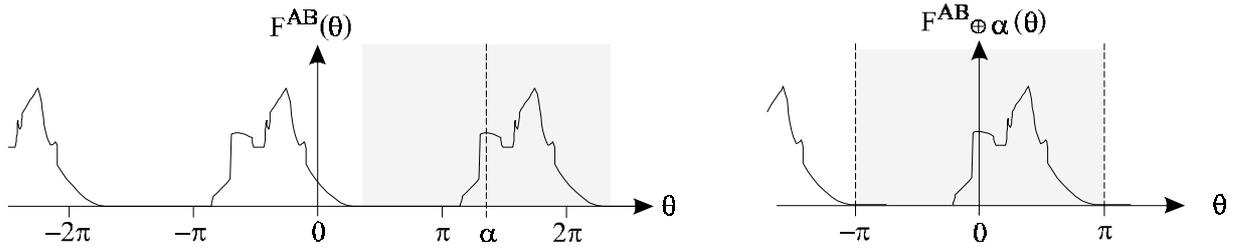
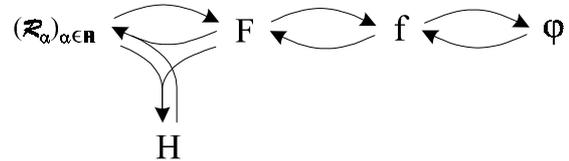


figure 19. Traitement des F-histogrammes pour l'évaluation des relations directionnelles.

$$\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H(F^{AB \oplus \alpha})$$

On peut constater un déséquilibre entre les propositions $9 \Leftarrow$ et $9 \Rightarrow$. Il n'est pas certain dans $9 \Leftarrow$ que H et μ se partagent [P16]. Cette condition apparaît pourtant dans $9 \Rightarrow$. Le fait est que [P16] pourrait être assouplie. Mais l'on obtiendrait une propriété complexe, peu maniable, qui ne présenterait pas plus d'intérêt d'un point de vue pratique. Il n'est pas certain non plus dans $9 \Leftarrow$ que H possède [P18]. Même si F vérifie [P15] et $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ [A4]. Nous renvoyons le lecteur à la démonstration de la proposition (partie Θ).

3.3.3. Deuxième récapitulatif



↳ De $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ vers F

Comment représenter la position relative de deux objets A et B ? Et comment évaluer, à partir de cette représentation, les relations directionnelles entre A et B ? Dans l'idée de répondre à ces questions, nous nous proposons d'étudier les sections longitudinales des objets au moyen d'une fonction F de T vers \mathbf{R}_+ . Compte tenu des propriétés axiomatiques [A1] à [A4], nous exigeons de F les propriétés [P11] à [P14].

↳ De F vers f , et vice-versa

Cette exigence entraîne l'existence d'une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ , possédant [P3] et [P4], et partageant avec F la propriété [P9] (proposition 1 \Leftarrow). Un résultat qui nous incite à adopter [P10] : le traitement des sections longitudinales est ainsi ramené à celui des segments qui les composent. f génère maintenant F . Et possède — sous une condition légitime de continuité — la propriété supplémentaire [P5]. Réciproquement, toute fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant [P3] à [P5] génère une fonction F possédant [P10] à [P14] (proposition 1 \Rightarrow).

↳ De f vers φ , et vice-versa

La fonction f ne se situe pas au dernier niveau de l'édifice. Si on lui accorde certaine propriété de différentiabilité — en plus de [P3] à [P5] —, alors il existe une application φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ qui possède [P1] et génère f sur $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$ (proposition 2 \Leftarrow). Réciproquement, une application φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ vérifiant [P1] génère sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ une fonction f possédant [P3] à [P5] (proposition 2 \Rightarrow).

↳ De F vers $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$, en passant par H

Mais revenons à la fonction F de T vers \mathbf{R}_+ chargée du traitement des sections longitudinales (et possédant [P10] à [P14]). Pour tout couple (A,B) F -évaluable d'objets, l'application F^{AB} constitue une façon naturelle de compresser l'ensemble $\{(\Delta_\theta(v), F(\theta, A_\theta(v)), B_\theta(v))\}_{(\theta,v) \in \mathbf{R}^2}$ de données — et de représenter, en définitive, la position relative de A et B . Soit maintenant $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$

une famille de relations directionnelles (au sens large décrit §3.1.2). Est-il possible qu'elle s'informe par le biais des F-histogrammes ? Dans l'affirmative, il existe une application H de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$ telle que F et H génèrent $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ (proposition 9 \Leftarrow). Examinons la réciproque (proposition 9 \Rightarrow). Considérons une famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de relations binaires générée par la fonction F et une application H de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$. $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ possède bien [A2]. Une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ possède [A3] est que H possède [P17]. Qu'en est-il de [A1] ? Soit μ la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points : pour que $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ partage [A1] avec μ , le plus simple est d'exiger de H qu'elle partage [P16] avec μ .

↪ Où comment satisfaire [A4], toujours en bouclant la boucle

À ce stade, [A4] n'est pas encore garantie. Redescendons un instant dans la chaîne de fonctions, au niveau de f . Le cas où f possède la propriété [P7] semble particulièrement intéressant. Le cas où f possède [P8] également. Il se trouve que les fonctions génératrices correspondantes sont, à une constante multiplicative près, deux éléments d'une même famille $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$ (proposition 6 \Leftarrow). Or la fonction f générée sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ par un membre quelconque de $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$ possède [P6] en plus de [P3] à [P5] (proposition 6 \Rightarrow). Mais si une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possède [P3] à [P6], alors la fonction F générée possède [P15] en plus de [P10] à [P14] (proposition 7 \Rightarrow). Et dans ce cas, il existe une condition nécessaire et suffisante simple portant sur H pour que $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ vérifie [A4] : c'est [P18] (proposition 9). Restent deux questions de réciprocity, et nous les avons traitées : la propriété [P15] permet de retrouver [P6] (proposition 7 \Leftarrow), [P6] permet à son tour de retrouver les φ_r (proposition 6 \Leftarrow).

4. Aspects pratiques

4.1. Calcul de f

Soit φ une fonction de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ possédant la propriété [P1] et soit f la fonction générée par φ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ (définition 5, §3.2.2). Nous nous intéressons dans ce paragraphe au calcul de f . Après quelques considérations générales sur le problème, nous proposons trois exemples concrets de fonctions f : f_0 , f_2 et \bar{f}_2 . Il s'agit d'exemples clés, sur lesquels nous reviendrons tout au long de ce chapitre. f_0 est générée par φ_0 (§3.2.4). Elle vérifie [P7]. f_2 est générée par φ_2 et vérifie [P8]. Enfin, \bar{f}_2 est générée par une fonction φ n'appartenant pas à la famille $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$.

4.1.1. Fonctions f et classes d'Allen

↪ Classes d'Allen sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$

Selon Allen ( *Alle83*), les couples de segments non dégénérés de \mathbf{R} peuvent être répartis en treize classes. Pour présenter ces classes — les relations d'Allen —, nous avons imaginé un graphe non orienté dont elles sont les sommets : une arête du graphe relie deux configurations si et seulement si une déformation continue de l'un des segments permet de passer directement de l'une à l'autre de ces configurations (fig.20).

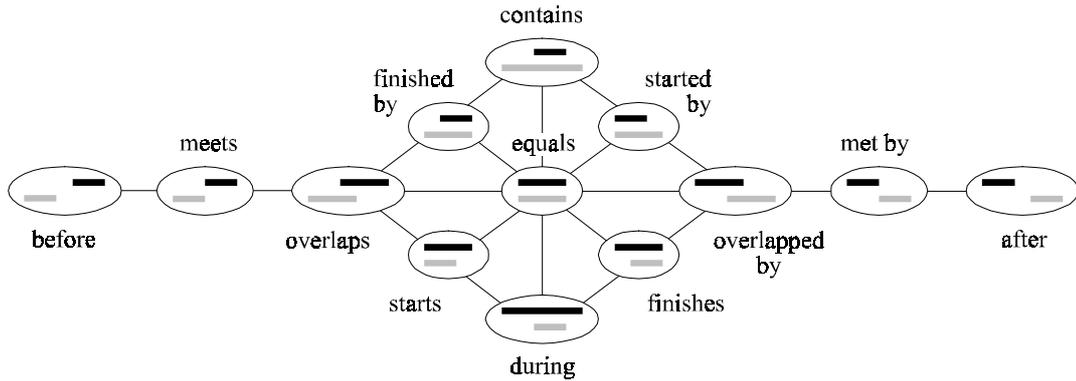


figure 20. Les relations d'Allen, vues comme les sommets d'un graphe non orienté (pardon aux inconditionnels de la langue française).

Assimilons \mathbf{R} à la droite orientée $\Delta_0(0)$ du plan (axe des abscisses). Le couple (I,J) de segments de \mathbf{R} peut alors être assimilé à l'élément (0,I,J) de T. Or f considère cet élément comme le triplet (d_I, D_{IJ}^0, d_J) de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ — de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ si ni I ni J ne sont dégénérés. Réciproquement, tout élément de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ représente via f une infinité de couples de segments non dégénérés de \mathbf{R} . Mais tous ces couples appartiennent à la même classe d'Allen. Nous avons donc un moyen cohérent de redéfinir les classes d'Allen sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ (fig.21).

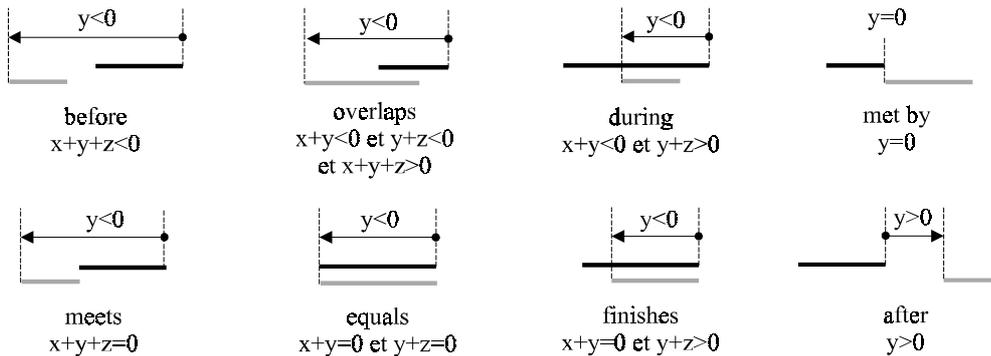


figure 21. Classes d'Allen sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$. Exemples.

x est la longueur du segment clair (argument), z celle du segment foncé (référent).

↳ Super-classes

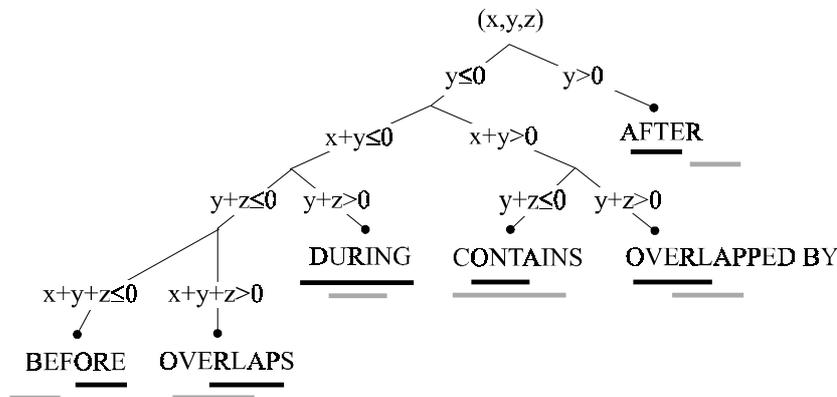


figure 22. Les six super-classes définies sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$.

La fonction φ est continue en tout point de \mathbf{R} sauf peut-être en 0. A priori, l'existence de ce point d' « articulation » oblige à considérer six cas lors du calcul de f . Ces cas correspondent à des « super-classes » (fig.22), définies en unissant certaines relations d'Allen (fig.23). Les unions sont faites par affinités — au sens du graphe de la figure 20.

🔗 **Classes fondamentales**

Les propriétés du calcul intégral mettent en évidence trois classes fondamentales pour le calcul de f (fig.23) : *before*, *equals*, *after*. Remarquons tout d'abord que l'expression de $f(x,y,z)$ associée à la classe *met by* se déduit de celle associée à la classe *after* : il suffit de faire tendre y vers 0. Si la limite obtenue est infinie, c'est que f n'est définie en aucun élément de la classe *met by*. Nous illustrerons cela tout à l'heure (§4.1.2 et §4.1.3). De la même manière, *meets* est un cas limite de *before* : φ étant nulle sur \mathbf{R}_- , $f(x,y,z)$ vaut d'ailleurs 0, que (x,y,z) appartienne à l'une ou l'autre de ces deux classes. Considérons maintenant un élément (x,y,z) d'une super-classe. Par exemple *DURING*. Il est facile de démontrer^{V5} que f est définie en (x,y,z) si et seulement si elle l'est en l'élément $(x,0,y+z)$ de la classe *met by*, en l'élément $(x,-x,x)$ de *equals* et en l'élément $(x,y,-x-y)$ de *meets*. Auquel cas : $f(x,y,z) = f(x,0,y+z) + f(x,-x,x) + f(x,y,-x-y)$. En fin de compte, comme *met by* et *meets* sont des cas limites de *after* et *before*, l'expression de $f(x,y,z)$ associée à la classe *DURING* se déduit de trois expressions : celles associées aux classes *before*, *equals*, *after*.

| | | |
|---|---|--|
| BEFORE before \cup meets | $x+y+z \leq 0$ | |
| OVERLAPS overlaps \cup equals \cup starts \cup finished by | $\begin{cases} x+y \leq 0 \\ y+z \leq 0 \\ x+y+z > 0 \end{cases}$ | |
| DURING during \cup finishes | $\begin{cases} x+y \leq 0 \\ y+z > 0 \end{cases}$ | |
| CONTAINS contains \cup started by | $\begin{cases} x+y > 0 \\ y+z \leq 0 \end{cases}$ | |
| OVERLAPPED BY overlapped by \cup met by | $\begin{cases} y \leq 0 \\ x+y > 0 \\ y+z > 0 \end{cases}$ | |
| AFTER after | $y > 0$ | |

figure 23. Classes et calcul de f .
13 classes. 6 super-classes. 3 classes fondamentales (et leurs cas limites*).

4.1.2. La fonction f_0

Soit (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Si x ou z sont nuls, f_0 est évidemment définie et nulle en (x,y,z) . Écartons ce cas. Nous avons maintenant affaire à un élément de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$. Un calcul intégral simple montre^{V6} que si (x,y,z) appartient à la classe *equals*, alors f_0 est définie en (x,y,z) et : $f_0(x,y,z) = x^2/2$. Pour corollaire, f_0 est définie sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ tout entier. On montre par

ailleurs que si (x,y,z) appartient à la classe *after* alors : $f_0(x,y,z) = xz$. L'expression associée à la classe *met by* est donc la même. En effet : $\lim_{y \rightarrow 0^+} xz = xz$. Enfin, si (x,y,z) appartient à l'une ou l'autre des classes *before* et *meets* : $f_0(x,y,z) = 0$. Quelle que soit la super-classe à laquelle (x,y,z) appartient, nous sommes maintenant en mesure d'exprimer $f_0(x,y,z)$ sans avoir à procéder à aucune autre intégration. Reprenons l'exemple de la classe *DURING* :

$$f_0(x,y,z) = f_0(x,0,y+z) + f_0(x,-x,x) + f(x,y,-x-y) = x(y+z) + x^2/2 + 0 = (x/2+y+z)x$$

| | |
|----------------------|----------------------------|
| <i>BEFORE</i> | $f_0(x,y,z) = 0$ |
| <i>OVERLAPS</i> | $f_0(x,y,z) = (x+y+z)^2/2$ |
| <i>DURING</i> | $f_0(x,y,z) = (x/2+y+z)x$ |
| <i>CONTAINS</i> | $f_0(x,y,z) = (x+y+z/2)z$ |
| <i>OVERLAPPED BY</i> | $f_0(x,y,z) = xz - y^2/2$ |
| <i>AFTER</i> | $f_0(x,y,z) = xz$ |

formulaire 1. La fonction f_0 .

4.1.3. La fonction f_2

On montre^{∇6} que pour tout élément (x,y,z) de \mathbf{R}_+^{*3} :

$$f_2(x,y,z) = \ln \frac{(x+y)(y+z)}{y(x+y+z)}$$

C'est l'expression associée à la classe fondamentale *after*. Pour corollaire, f_2 n'est définie en aucun élément de la classe *met by* (et a fortiori en aucun élément d'une super-classe autre que *BEFORE* et *AFTER*). En effet :

$$\forall (x,z) \in \mathbf{R}_+^{*2}, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln \frac{(x+y)(y+z)}{y(x+y+z)} = +\infty$$

| | |
|---------------|--|
| <i>BEFORE</i> | $f_2(x,y,z) = 0$ |
| <i>AFTER</i> | $f_2(x,y,z) = \ln \frac{(x+y)(y+z)}{y(x+y+z)}$ |

formulaire 2. La fonction f_2 .

4.1.4. La fonction \bar{f}_2

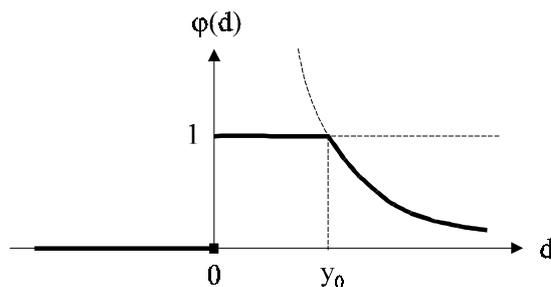


figure 24. Courbe représentative de $\bar{\varphi}_2$.

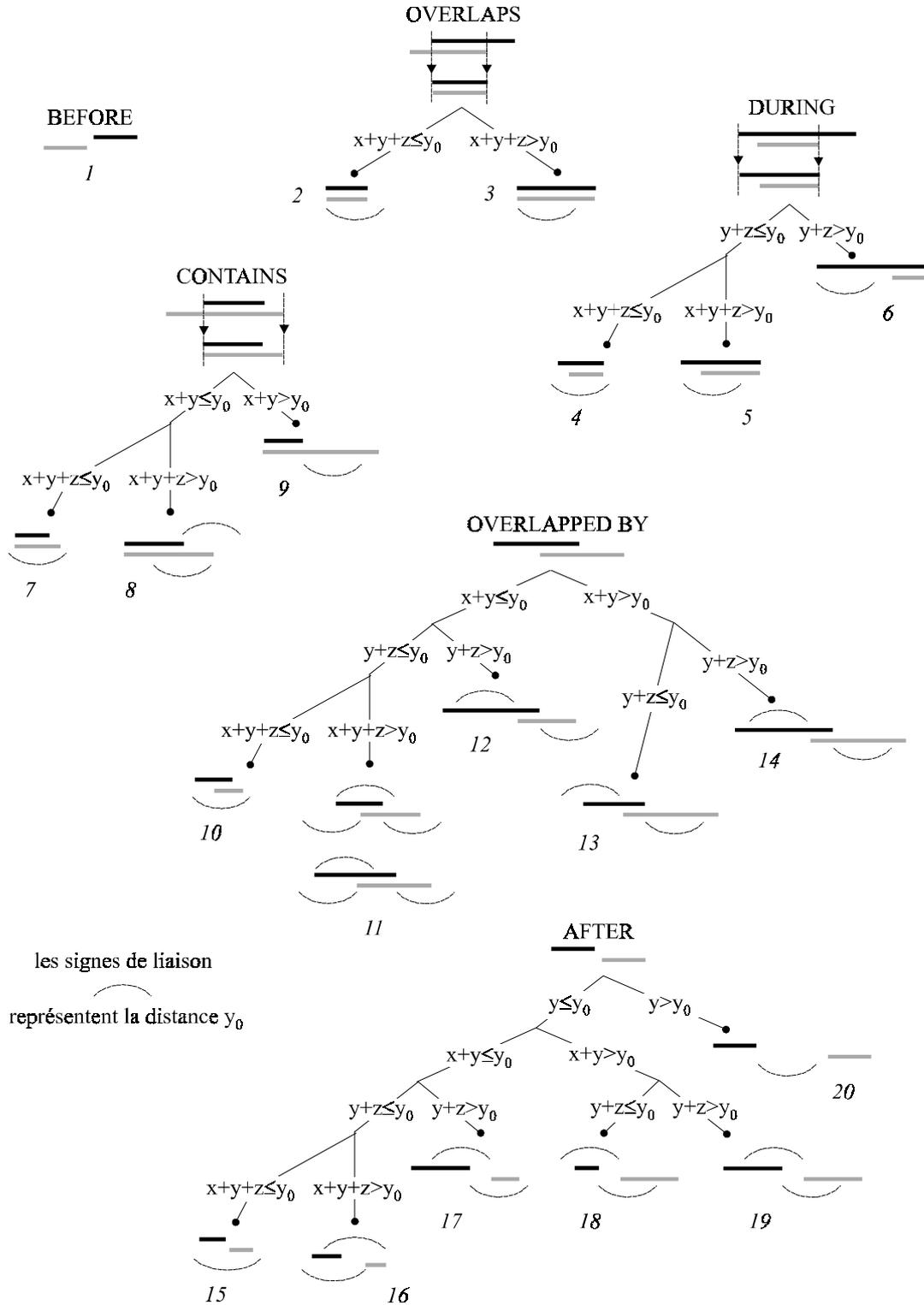


figure 25. Calcul d'une fonction f dont la génératrice φ possède deux points d'articulation : 0 et y_0 . A priori, vingt cas sont à considérer.

| | | |
|----------------------|----|---|
| <i>BEFORE</i> | 1 | $\bar{f}_2(x,y,z) = 0$ |
| <i>OVERLAPS</i> | 2 | $\bar{f}_2(x,y,z) = (x+y+z)^2/2$ |
| | 3 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{y_0}{x+y+z} + 2y_0(x+y+z-3y_0/4)$ |
| <i>DURING</i> | 4 | $\bar{f}_2(x,y,z) = (x/2+y+z)x$ |
| | 5 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{y_0}{x+y+z} + 2y_0x - (y+z-3y_0)(y+z-y_0)/2$ |
| | 6 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{y+z}{x+y+z} + 2y_0x$ |
| <i>CONTAINS</i> | 7 | $\bar{f}_2(x,y,z) = (x+y+z/2)z$ |
| | 8 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{y_0}{x+y+z} + 2y_0z - (x+y-3y_0)(x+y-y_0)/2$ |
| | 9 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{x+y}{x+y+z} + 2y_0z$ |
| <i>OVERLAPPED BY</i> | 10 | $\bar{f}_2(x,y,z) = xz - y^2/2$ |
| | 11 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{y_0}{x+y+z} - (x+y+z-3y_0)(x+y+z-y_0)/2 + xz - y^2/2$ |
| | 12 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{y+z}{x+y+z} + 2y_0x - (x+y)^2/2$ |
| | 13 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{x+y}{x+y+z} + 2y_0z - (y+z)^2/2$ |
| | 14 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{(x+y)(y+z)}{y_0(x+y+z)} - 2y_0(y-3y_0/4)$ |
| <i>AFTER</i> | 15 | $\bar{f}_2(x,y,z) = xz$ |
| | 16 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{y_0}{x+y+z} - (x+y+z-3y_0)(x+y+z-y_0)/2 + xz$ |
| | 17 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{y+z}{x+y+z} - (x/2+y-2y_0)x$ |
| | 18 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{x+y}{x+y+z} - (y+z/2-2y_0)z$ |
| | 19 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{(x+y)(y+z)}{y_0(x+y+z)} + (y-3y_0)(y-y_0)/2$ |
| | 20 | $\bar{f}_2(x,y,z) = y_0^2 \cdot \ln \frac{(x+y)(y+z)}{y(x+y+z)}$ |

formulaire 3. La fonction \bar{f}_2 .

Soit y_0 un réel strictement positif et soit $\bar{\varphi}_2$ la fonction de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ définie par (fig.24) :

$$\forall d \in \mathbf{R}, [(d \leq 0 \Rightarrow \bar{\varphi}_2(d) = 0) \text{ et } (0 < d \leq y_0 \Rightarrow \bar{\varphi}_2(d) = 1) \text{ et } (y_0 < d \Rightarrow \bar{\varphi}_2(d) = y_0^2/d^2)]$$

$\bar{\varphi}_2$ n'appartient pas à la famille $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$. Mais elle vérifie [P1]. Nous noterons \bar{f}_2 la fonction qu'elle génère sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Nous verrons plus tard (§6.2) pourquoi cette fonction \bar{f}_2 nous intéresse particulièrement. $\bar{\varphi}_2$ possède non pas un, mais deux points d'articulation : 0 et y_0 . Ce qui nous oblige cette fois à considérer vingt cas lors du calcul de \bar{f}_2 (fig.25). Nous ne nous étendrons pas là-dessus. Remarquons simplement, comme le laisse apparaître le formulaire 3, que \bar{f}_2 est une fonction hybride de f_0 et f_2 , définie sur exactement $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$.

4.2. Calcul de F^{AB}

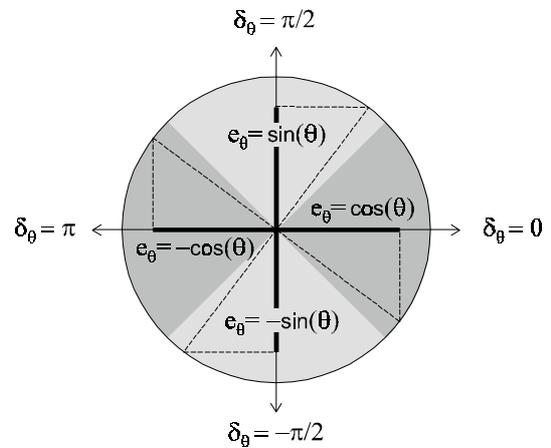
Soit f une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant les propriétés [P3] à [P5] et soit F la fonction de T vers \mathbf{R}_+ générée par f (définition 4, §3.2.1). Soit d'autre part (A, B) un couple F -évaluable d'objets nets (définition 6, §3.3.1). Nous nous intéressons dans ce paragraphe §4.2 au calcul du F -histogramme F^{AB} . Il ne sera évidemment pas question en pratique d'évaluer $F^{AB}(\theta)$ pour tout réel θ . Nous contraindrons θ à décrire un ensemble discrétisé de directions : l'ensemble Θ_ν égal à $\{2\pi i/\nu\}_{i \in \{1, \dots, \nu/2\}}$, où ν est un entier strictement positif multiple de 4 (qui est le nombre de directions fondamentales : haut, bas, gauche, droite). Un élément θ de Θ_ν appartient à $]-\pi, \pi]$. Pour les besoins de l'exposé, nous noterons e_θ et δ_θ les valeurs définies ainsi :

$$-3\pi/4 < \theta \leq -\pi/4 \Rightarrow (e_\theta = -\sin(\theta) \text{ et } \delta_\theta = -\pi/2)$$

$$-\pi/4 < \theta \leq \pi/4 \Rightarrow (e_\theta = \cos(\theta) \text{ et } \delta_\theta = 0)$$

$$\pi/4 < \theta \leq 3\pi/4 \Rightarrow (e_\theta = \sin(\theta) \text{ et } \delta_\theta = \pi/2)$$

$$(3\pi/4 < \theta \text{ ou } \theta \leq -3\pi/4) \Rightarrow (e_\theta = -\cos(\theta) \text{ et } \delta_\theta = \pi)$$



4.2.1. Cas d'objets polygonaux

Définition 9.

Un *objet net polygonal* est un objet net E dont la frontière δE est l'union d'un nombre fini de segments. Un *sommet* d'un objet net polygonal E est un point appartenant à au moins deux segments non dégénérés de δE , portés par des droites distinctes.

On suppose dans ce paragraphe §4.2.1 que A et B sont des objets nets polygonaux.

Pour une direction donnée θ de Θ_ν , quatre niveaux sont distingués dans le calcul de $F^{AB}(\theta)$. Au premier niveau, les objets sont découpés selon des bandes parallèles (fig.26a). Au second, les composantes connexes de chaque tronçon sont répertoriées (fig.26b). Ce sont des trapèzes. Au troisième niveau, d'autres trapèzes, plus simples à manipuler, leur sont substitués (fig.26c). L'intégration de fonctions numériques à variables réelles apparaît au dernier niveau de calcul.

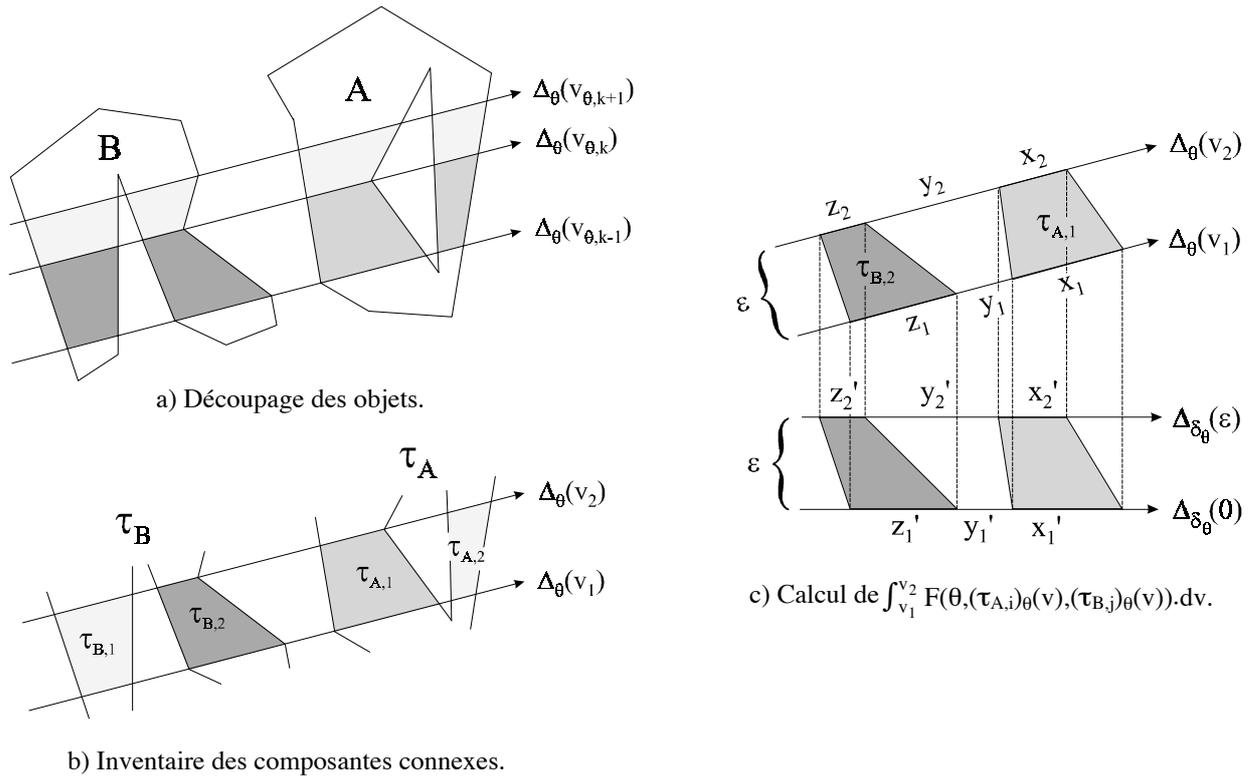


figure 26. Calcul des F-histogrammes. Cas d'objets polygonaux.

↳ **Premier niveau**

Fixons θ . Il nous faut calculer $F^{AB}(\theta)$, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$.

Soit $(v_{\theta,k})_{k \in 1..l}$ la suite strictement croissante de réels définie par : tout sommet de A appartient à une droite $\Delta_\theta(v_{\theta,k})$; tout sommet de B également ; réciproquement, toute $\Delta_\theta(v_{\theta,k})$ passe par au moins un sommet de A ou B. Les droites $\Delta_\theta(v_{\theta,k})$ découpent les objets selon des bandes parallèles (fig.26a). Et le calcul de $F^{AB}(\theta)$ se ramène à celui des $\int_{v_{\theta,k}}^{v_{\theta,k+1}} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$:

$$F^{AB}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv = \sum_{k \in 1..l-1} \int_{v_{\theta,k}}^{v_{\theta,k+1}} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$$

↳ **Second niveau**

Fixons k, posons $v_1 = v_{\theta,k}$ et $v_2 = v_{\theta,k+1}$. Il nous faut maintenant calculer $\int_{v_1}^{v_2} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$. Soit τ l'ensemble des points M du plan défini par : $M \in \tau \Leftrightarrow \exists v \in]v_1, v_2[/ M \in \Delta_\theta(v)$. Soit τ_A et τ_B les adhérences des intersections de τ avec respectivement A et B. Soit enfin $\{\tau_{A,i}\}_{i \in 1..n}$ l'ensemble des n composantes connexes de τ_A et $\{\tau_{B,j}\}_{j \in 1..m}$ l'ensemble des m composantes connexes de τ_B (fig.26b). Les $\tau_{A,i}$ et $\tau_{B,j}$ sont des objets nets trapézoïdaux. En fin de compte, et d'après [P10], le calcul de $F^{AB}(\theta)$ se ramène à celui des $\int_{v_1}^{v_2} F(\theta, (\tau_{A,i})_\theta(v), (\tau_{B,j})_\theta(v)).dv$:

$$\int_{v_1}^{v_2} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..m} \int_{v_1}^{v_2} F(\theta, (\tau_{A,i})_\theta(v), (\tau_{B,j})_\theta(v)).dv$$

↳ **Troisième niveau**

Fixons i, fixons j, posons $\varepsilon = v_2 - v_1$ et $\Gamma = \int_{v_1}^{v_2} F(\theta, (\tau_{A,i})_\theta(v), (\tau_{B,j})_\theta(v)).dv$. Il nous faut calculer Γ . $(\tau_{A,i})_\theta(v_1) \cap \Delta_\theta(v_1)$, $(\tau_{A,i})_\theta(v_2) \cap \Delta_\theta(v_2)$, $(\tau_{B,j})_\theta(v_1) \cap \Delta_\theta(v_1)$ et $(\tau_{B,j})_\theta(v_2) \cap \Delta_\theta(v_2)$ sont des

segments. Notons-les respectivement I_1, I_2, J_1 et J_2 . Considérons la projection orthogonale sur $\Delta_{\delta_\theta}(0)$ et appelons I_1' et J_1' les projetés respectifs de I_1 et J_1 . Considérons d'autre part la projection sur $\Delta_{\delta_\theta}(\varepsilon)$ et appelons I_2' et J_2' les projetés respectifs de I_2 et J_2 . Posons enfin (fig.26c) :

| | | | | | |
|-------------------|--|-------------------|-------------------|--|-------------------|
| $x_1 = d_{I_1}$ | $y_1 = D_{I_1 J_1}^\theta$ | $z_1 = d_{J_1}$ | $x_2 = d_{I_2}$ | $y_2 = D_{I_2 J_2}^\theta$ | $z_2 = d_{J_2}$ |
| $x_1' = d_{I_1'}$ | $y_1' = D_{I_1' J_1'}^{\delta_\theta}$ | $z_1' = d_{J_1'}$ | $x_2' = d_{I_2'}$ | $y_2' = D_{I_2' J_2'}^{\delta_\theta}$ | $z_2' = d_{J_2'}$ |

Et pour tout élément t de $[0, \varepsilon]$:

| | | |
|---|---|---|
| $x(t) = (x_2 - x_1)t/\varepsilon + x_1$ | $y(t) = (y_2 - y_1)t/\varepsilon + y_1$ | $z(t) = (z_2 - z_1)t/\varepsilon + z_1$ |
| $x'(t) = (x_2' - x_1')t/\varepsilon + x_1'$ | $y'(t) = (y_2' - y_1')t/\varepsilon + y_1'$ | $z'(t) = (z_2' - z_1')t/\varepsilon + z_1'$ |

En vertu de [P9], nous avons : $\Gamma = \int_0^\varepsilon f(x(t), y(t), z(t)).dt = \int_0^\varepsilon f(x'(t)/e_\theta, y'(t)/e_\theta, z'(t)/e_\theta).dt$
 Le calcul de $F^{AB}(\theta)$ est ainsi ramené à l'intégration de fonctions numériques à variables réelles. Notons que d'après la proposition 4 \Rightarrow (§3.2.4), si f est une fonction f_r alors :

$$\Gamma = e_\theta^{r-2} \cdot \int_0^\varepsilon f_r(x'(t), y'(t), z'(t)).dt$$

↳ **Quatrième niveau : cas de f_0**

Il nous faut évaluer Γ , sachant que f est la fonction f_0 . Comme nous l'avons vu §4.1.2, 6 (super-)classes de triplets (x, y, z) doivent être considérées lors du calcul de f_0 à partir de sa génératrice : *BEFORE, OVERLAPS, DURING, CONTAINS, OVERLAPPED BY* et *AFTER*. À chacune correspond une expression de $f_0(x, y, z)$. On dénombre ainsi 5 expressions distinctes — aux permutations de x et z près — (formulaire 1). Ainsi que le suggère la figure 23, les 6 classes auraient pu être baptisées : *BEFORE, BEFORE+EQUALS+BEFORE, AFTER+EQUALS+BEFORE, BEFORE+EQUALS+AFTER, AFTER+EQUALS+AFTER, AFTER*. Ces dénominations prosaïques ont le mérite d'indiquer comment obtenir les expressions précédentes. *before, equals* et *after* avaient été qualifiées de classes fondamentales.

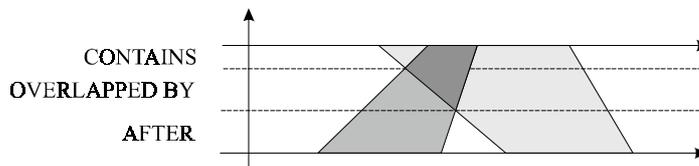


figure 27. La relation *CONTAINS+OVERLAPPED BY+AFTER* entre deux trapèzes.

De la même manière, 36 classes — ou relations entre deux trapèzes — sont à considérer lors du calcul de Γ : il y a en effet 6 relations possibles (*BEFORE, OVERLAPS, etc*) entre les segments I_1 et J_1 (ou I_1' et J_1'), autant entre I_2 et J_2 . Les classes fondamentales correspondent aux cas où les relations entre I_1 et J_1 d'une part, I_2 et J_2 d'autre part, sont les mêmes. Il y en a donc 6, et nous les nommerons tout naturellement : *BEFORE, OVERLAPS, etc*. Les autres classes seront désignées prosaïquement, par des combinaisons de ces 6 termes (fig.27). Aux permutations de (x_1', y_1', z_1') et (x_2', y_2', z_2') près, 21 expressions distinctes de Γ peuvent être dénombrées : $6 \times (6+1)/2$. Nous nous contenterons ici de présenter celles associées aux classes *BEFORE* et *AFTER* : elles suffisent

pour traiter le cas d'objets disjoints. Notons que les valeurs $1/(6e_0^2)$ et ε pourront être mises en facteur respectivement dans $F_0^{AB}(\theta)$ et $\int_{v_1}^{v_2} F_0(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$.

$$\begin{aligned} \text{BEFORE} & \quad \Gamma = 0 \\ \text{AFTER} & \quad \Gamma = e_0^{-2} \cdot \int_0^\varepsilon x'(t)z'(t).dt = [1/(6 e_0^2)] \cdot \varepsilon \cdot [(x_1'+x_2')(z_1'+z_2')+x_1'z_1'+x_2'z_2'] \end{aligned}$$

↪ **Quatrième niveau : cas de f_2**

Il nous faut calculer Γ , sachant que f est la fonction f_2 .

f_2 ne permet pas la manipulation d'objets sécants (§4.1.3, §3.3.1 proposition 8). De ce fait, sur les 36 relations entre trapèzes dénombrées plus haut, seules *BEFORE* et *AFTER* peuvent être considérées. L'expression de Γ associée à la relation *BEFORE* est évidemment : $\Gamma=0$. Celle associée à la relation *AFTER* est relativement complexe. $\mathcal{T}_{x \ln x}$ désigne une application de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ vers \mathbf{R} . $\mathcal{T}_{x \ln x}$ et les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$, etc., sont définies dans le tableau additionnel.

$$\Gamma = \int_0^\varepsilon \ln \frac{(x'(t) + y'(t))(y'(t) + z'(t))}{y'(t)(x'(t) + y'(t) + z'(t))}.dt = \varepsilon \cdot [\mathcal{T}_{x \ln x}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathcal{T}_{x \ln x}(\beta_1, \beta_2) + \mathcal{T}_{x \ln x}(\gamma_1, \gamma_2) - \mathcal{T}_{x \ln x}(\delta_1, \delta_2)]$$

| | | | |
|--|--------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\forall (r,s) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, r \neq s \Rightarrow \mathcal{T}_{x \ln x}(r,s) = [s \cdot \ln(s) - r \cdot \ln(r)] / (s-r)$ $\forall r \in \mathbf{R}_+^*, \mathcal{T}_{x \ln x}(r,r) = \lim_{s \rightarrow r} \mathcal{T}_{x \ln x}(r,s) = 1 + \ln(r)$ | | | |
| $\alpha_1 = x_1' + y_1'$ | $\alpha_2 = x_2' + y_2'$ | $\beta_1 = y_1'$ | $\beta_2 = y_2'$ |
| $\gamma_1 = y_1' + z_1'$ | $\gamma_2 = y_2' + z_2'$ | $\delta_1 = x_1' + y_1' + z_1'$ | $\delta_2 = x_2' + y_2' + z_2'$ |

Lorsque s est « proche » de r , $1 + \ln[(r+s)/2]$ — soit $[1 - \ln(2)] + \ln(r+s)$ — est une bonne approximation de $\mathcal{T}_{x \ln x}(r,s)$. Notons d'autre part que les valeurs $\alpha_2 \cdot \ln(\alpha_2)$, $\beta_2 \cdot \ln(\beta_2)$, $\gamma_2 \cdot \ln(\gamma_2)$ et $\delta_2 \cdot \ln(\delta_2)$ pourront être réutilisées lors du traitement des tronçons suivants, pour le calcul de :

$$\int_{v_{\theta,k+1}}^{v_{\theta,k+2}} F_2(\theta, (\tau_{A,i})_\theta(v), (\tau_{B,j})_\theta(v)).dv$$

↪ **Quatrième niveau : cas de \bar{f}_2**

Pour le calcul de Γ , 400 classes — ou relations entre deux trapèzes — doivent cette fois être considérées : il y a en effet 20 relations possibles entre les segments I_1 et J_1 (ou I_1' et J_1'), autant entre I_2 et J_2 (§4.1.4). Les classes fondamentales correspondent toujours aux cas où les relations entre I_1 et J_1 d'une part, I_2 et J_2 d'autre part, sont les mêmes. Il y en a donc 20. Aux permutations de (x_1', y_1', z_1') et (x_2', y_2', z_2') près, 210 expressions distinctes de Γ peuvent être dénombrées : $20 \times (20+1)/2$. Question implémentation, comme le suggérait déjà la figure 27, il est évidemment possible, en découpant les objets selon des bandes plus fines, de se limiter au précalcul des expressions associées aux classes fondamentales.

4.2.2. Cas de données "rasters"

En désignant par *pixel* une surface carrée d'une unité de côté, fermée, convexe, et dont les sommets sont des points de coordonnées entières, nous plongeons l'espace discret dans l'espace analogique. Par hypothèse, A et B sont ici des unions de pixels. Il s'agit donc en particulier d'objets polygonaux. Mais c'est évidemment une méthode spécifique — discrète — qui est

proposée dans ce paragraphe §4.2.2 pour le calcul de F^{AB} (fig.28). Nous revenons sur deux définitions : celle d'un F-histogramme et celle d'une section longitudinale. Là réside la spécificité de la méthode. Sur les quatre niveaux de calcul décrits précédemment, seuls les trois premiers subsistent.

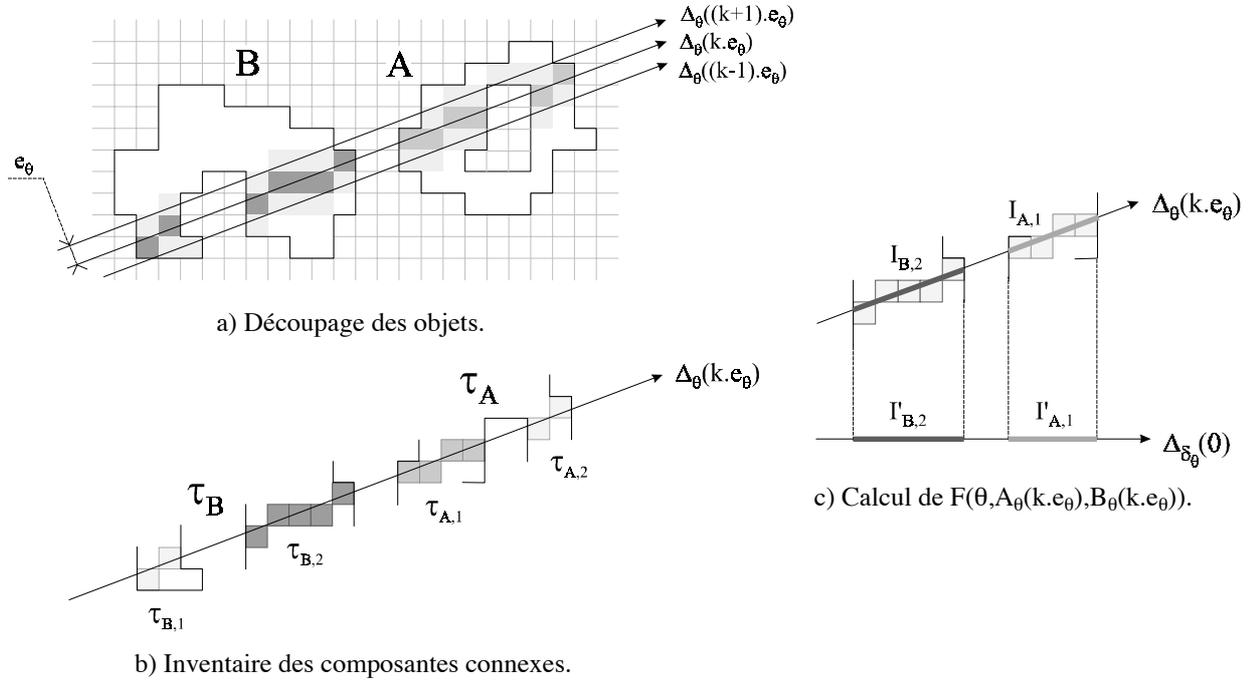


figure 28. Calcul des F-histogrammes. Cas de données rasters.

↳ Premier niveau

Fixons la direction θ . Il nous faut évaluer $F^{AB}(\theta)$, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) \cdot dv$. Nous remplaçons cette intégrale par une somme de Riemann. Plus précisément, nous nous ramenons au calcul des $F(\theta, A_\theta(k.e_\theta), B_\theta(k.e_\theta))$ en redéfinissant $F^{AB}(\theta)$ de la façon suivante :

$$F^{AB}(\theta) = e_\theta \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(\theta, A_\theta(k.e_\theta), B_\theta(k.e_\theta))$$

Cette somme admet évidemment un nombre fini de termes non nuls. Décrivons le découpage des objets auquel elle correspond. En premier lieu, notons $\tau_{\theta,0}$ une représentation discrète de la droite $\Delta_\theta(0)$. $\tau_{\theta,0}$ est une union de pixels, obtenue par un tramage de $\Delta_\theta(0)$. L'algorithme de Bresenham en arithmétique entière, couramment utilisé en infographie, constitue un moyen particulièrement efficace de réaliser ce tramage ([Rog88](#)). Pour tout entier relatif k , notons maintenant $\tau_{\theta,k}$ l'image de $\tau_{\theta,0}$ par une translation : celle de vecteur $k\vec{i}$ si θ appartient à l'intervalle $]-3\pi/4, -\pi/4]$, $-k\vec{i}$ si θ appartient à $]\pi/4, 3\pi/4]$, $k\vec{j}$ si θ appartient à $]-\pi/4, \pi/4]$, $-k\vec{j}$ sinon. Chaque $\tau_{\theta,k}$ est le résultat d'un tramage de la droite $\Delta_\theta(k.e_\theta)$ et découpe sur les objets un ensemble de pixels (fig.28a).

↳ Second niveau

Fixons k . Soit τ_A l'intersection de $\tau_{\theta,k}$ avec A , τ_B l'intersection de $\tau_{\theta,k}$ avec B . À ce niveau de calcul, il s'agit de répertorier l'ensemble $\{\tau_{A,i}\}_{i \in 1..n}$ des composantes connexes de τ_A et l'ensemble $\{\tau_{B,j}\}_{j \in 1..m}$ des composantes connexes de τ_B (fig.28b).

↳ Troisième niveau

Nous en arrivons au calcul de $F(\theta, A_\theta(k.e_\theta), B_\theta(k.e_\theta))$ proprement dit. Pour tout i de $1..n$ et tout j de $1..m$, notons $I'_{A,i}$ et $I'_{B,j}$ les images respectives de $\tau_{A,i}$ et $\tau_{B,j}$ par la projection orthogonale sur $\Delta_{\delta_\theta}(0)$ et notons $I_{A,i}$ et $I_{B,j}$ les images respectives de $I'_{A,i}$ et $I'_{B,j}$ par la projection sur $\Delta_\theta(k.e_\theta)$ perpendiculairement à $\Delta_{\delta_\theta}(0)$. $I'_{A,i}$, $I'_{B,j}$, $I_{A,i}$ et $I_{B,j}$ sont des segments du plan affine (fig.28c). Nous revenons sur la définition d'une section longitudinale en posant :

$$A_\theta(k.e_\theta) = \bigcup_{i \in 1..n} I_{A,i} \text{ et } B_\theta(k.e_\theta) = \bigcup_{j \in 1..m} I_{B,j} .$$

Nous avons par conséquent :

$$F(\theta, A_\theta(k.e_\theta), B_\theta(k.e_\theta)) = F(\theta, \bigcup_{i \in 1..n} I_{A,i}, \bigcup_{j \in 1..m} I_{B,j})$$

$$F(\theta, A_\theta(k.e_\theta), B_\theta(k.e_\theta)) = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..m} F(\theta, I_{A,i}, I_{B,j})$$

$$F(\theta, A_\theta(k.e_\theta), B_\theta(k.e_\theta)) = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..m} f(d_{I_{A,i}}, D_{I_{A,i}I_{B,j}}^\theta, d_{I_{B,j}})$$

$$F(\theta, A_\theta(k.e_\theta), B_\theta(k.e_\theta)) = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..m} f(d_{I'_{A,i}}/e_\theta, D_{I'_{A,i}I'_{B,j}}^{\delta_\theta}/e_\theta, d_{I'_{B,j}}/e_\theta)$$

La seconde égalité découle de [P10], la troisième de [P9].

Si f est une fonction f_r , nous obtenons plus simplement (proposition 4 \Rightarrow , §3.2.4) :

$$F_r(\theta, A_\theta(k.e_\theta), B_\theta(k.e_\theta)) = e_\theta^{r-2} \cdot \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..m} f_r(d_{I'_{A,i}}, D_{I'_{A,i}I'_{B,j}}^{\delta_\theta}, d_{I'_{B,j}})$$

Observons que les $(d_{I'_{A,i}}, D_{I'_{A,i}I'_{B,j}}^{\delta_\theta}, d_{I'_{B,j}})$ sont des triplets d'entiers.

↳ Remarque

Bien entendu, seuls les pixels des objets A et B nous importent vraiment. Il n'est donc pas forcément nécessaire de considérer toutes les directions de Θ_v . Ni, pour une direction θ donnée, les représentations discrètes $\tau_{\theta,k}$ de toutes les droites $\Delta_\theta(k.e_\theta)$. Ni même, pour une direction θ et un entier k donnés, tous les pixels de $\tau_{\theta,k}$. La figure 29 illustre ces propos. Les optimisations suggérées reposent sur le concept de rectangle englobant. Considérons une direction θ de Θ_v . Si θ n'appartient ni à $[\theta_{\min 1}, \theta_{\max 1}]$ ni à $[\theta_{\min 2}, \theta_{\max 2}]$, il n'existe aucune valeur de k telle que la droite $\Delta_\theta(k.e_\theta)$ coupe simultanément A et B . Si θ est la direction θ_0 , $\Delta_\theta(k.e_\theta)$ n'est susceptible de remplir cette condition que si k appartient à $[k_{\min}, k_{\max}]$. Et pour une telle valeur de k , il est inutile d'examiner les pixels de $\tau_{\theta,k}$ situés en dehors des rectangles englobants.

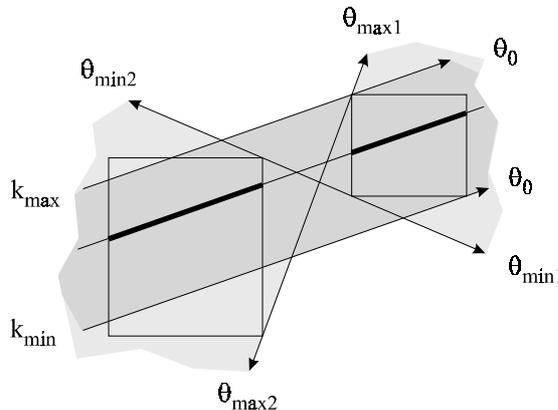


figure 29. Calcul des F-histogrammes. Exemple d'optimisation.
Chaque rectangle est supposé englober l'un des objets traités.

4.3. Conclusion

En pratique, un F-histogramme est représenté par un nombre limité de valeurs : l'ensemble des directions est discrétisé. D'autre part, la structure de données utilisée pour décrire les objets leur confère certaines caractéristiques. Prendre en compte ces caractéristiques, exploiter la puissance du calcul intégral et les propriétés des fonctions f et F , permet de développer des algorithmes de calcul très efficaces. Ainsi, le traitement d'un couple d'objets se traduit fondamentalement par un ensemble d'instanciations d'expressions algébriques. Dans le cas de données vecteurs (objets polygonaux), chaque instanciation correspond au traitement d'un couple de trapèzes. Dans le cas de données "rasters", chacune correspond au traitement simultané d'un paquet de couples de pixels. Le nombre d'expressions à engranger peut varier de quelques unités à quelques dizaines, voire quelques centaines. Mais toutes sont prédéterminées. Et là est l'essentiel.

5. Première étude comparative : histogrammes d'angles et F-histogrammes

5.1. Introduction

Dans ce paragraphe, nous comparons de manière approfondie les histogrammes d'angles avec les F_0 -histogrammes et, plus généralement, avec les F-histogrammes. Une étude d'autant plus fondée qu'histogrammes d'angles et F_0 -histogrammes sont en réalité des équivalents théoriques. Mais rappelons la définition d'un histogramme d'angles. Considérons un ensemble $\mathcal{?}$ de points du plan, fini et non vide ($\mathcal{?}$ représente en pratique le support d'une image numérique). Pour tout réel θ , notons $\mathcal{?}_\theta$ l'ensemble des couples (p,q) de points distincts de $\mathcal{?}$ tels que :

$$\angle(p,q) \equiv \theta [2\pi]$$

Définition 10.



Soit A et B deux sous-ensembles flous de $\mathcal{?}$, μ_A et μ_B leurs fonctions d'appartenance respectives. L'histogramme d'angles associé au couple (A,B) est l'application \mathcal{A}^{AB} définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{AB} \mid \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ \theta &\mapsto \sum_{(b,a) \in \mathcal{?}_\theta} \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\} \end{aligned}$$

Si A et B sont nets, $\mathcal{A}^{AB}(\theta)$ est tout simplement le nombre d'éléments (a,b) de $A \times B$ tels que : $\angle(b,a) \equiv \theta [2\pi]$. La définition 10 d'un histogramme d'angles correspond à celle proposée par Miyajima et Ralescu dans [Miyajima et Ralescu 1994b](#). Nous pouvons illustrer maintenant l'équivalence théorique dont nous parlions plus haut — et qui donne tout son sens au titre de ce paragraphe §5. Les égalités suivantes sont vérifiées pour tout couple (A,B) d'objets nets disjoints d'une image numérique ^{V7} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{AB}(0) &= F_0^{AB}(0) & \mathcal{A}^{AB}(\pi/2) &= F_0^{AB}(\pi/2) \\ \mathcal{A}^{AB}(\pi) &= F_0^{AB}(\pi) & \mathcal{A}^{AB}(-\pi/2) &= F_0^{AB}(-\pi/2) \end{aligned}$$

5.2. Outils et Méthodes

5.2.1. Les méthodes **M** et **Mr**

L'évaluation des relations directionnelles sert de prétexte à notre étude. **M** dénote une méthode d'évaluation proposée par Miyajima et Ralescu ([Miy94b]). Elle repose sur le calcul d'histogrammes d'angles. **Mr** — où r est un réel — dénote la variante de **M** obtenue en substituant au calcul précédent celui de F_r -histogrammes. Nous considérons principalement deux variantes : **M0** et **M2**. **M0** s'appuie donc sur la construction de F_0 -histogrammes et **M2** sur celle de F_2 -histogrammes. Rappelons que c'est la propriété [P7], exprimant une indépendance vis-à-vis de la distance, qui est à l'origine de F_0 (§3.2.4). Et c'est la propriété [P8], exprimant une indépendance vis-à-vis de l'échelle, qui est à l'origine de F_2 . Comme l'indique le tableau suivant, à chaque méthode correspond une famille de relations directionnelles :

| méthode M | méthode M0 | méthode M2 |
|---|---|---|
| $\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H_M^\mu(\mathcal{A}^{AB} \oplus \alpha)$ | $\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H_M^\mu(F_0^{AB} \oplus \alpha)$ | $\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H_M^\mu(F_2^{AB} \oplus \alpha)$ |

H_M^μ désigne évidemment une application de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers \mathbf{R}_+ (§3.3.2). Elle partage [P16] avec μ et possède [P17] et [P18]. Il n'est pas important ici de savoir ce qu'est exactement H_M^μ (nous y reviendrons de toute façon dans le paragraphe §7). Retenons simplement que les méthodes considérées ne diffèrent que par le choix des histogrammes utilisés.

5.2.2. Normalisation et distances

Soit A et B deux objets et soit A' et B' leurs images respectives par une homothétie de rapport strictement positif. Nous savons que F_0 possède [P15] (§3.2.4). Pour corollaire immédiat, il existe un réel K tel que : $F_0^{A'B'} = K \cdot F_0^{AB}$. Nous savons d'autre part que H_M^μ vérifie [P18]. Par conséquent : $\forall \alpha \in \mathbf{R}, H_M^\mu(F_0^{AB} \oplus \alpha) = H_M^\mu((K \cdot F_0^{AB}) \oplus \alpha)$. Ce sont évidemment ces deux égalités qui garantissent la propriété axiomatique fondamentale [A4]. Elles expliquent ici pourquoi tous les histogrammes sont normalisés avant même d'être représentés ou comparés. Soit donc h et h' deux histogrammes. Les *histogrammes normalisés* $\langle h \rangle$ et $\langle h' \rangle$ sont les applications définies par : $\langle h \rangle = h / [\sup_{\theta \in \mathbf{R}} h(\theta)]$ et $\langle h' \rangle = h' / [\sup_{\theta \in \mathbf{R}} h'(\theta)]$. La *distance entre les histogrammes* h et h' est la valeur $\sup_{\theta \in \mathbf{R}} |\langle h' \rangle(\theta) - \langle h \rangle(\theta)|$. La *distance entre les relations directionnelles* associées est la valeur $\sup_{\alpha \in \mathbf{R}} |H_M^\mu(\langle h' \rangle \oplus \alpha) - H_M^\mu(\langle h \rangle \oplus \alpha)|$ (égale à $\sup_{\alpha \in \mathbf{R}} |H_M^\mu(h' \oplus \alpha) - H_M^\mu(h \oplus \alpha)|$). Ces valeurs appartiennent à l'intervalle $[0,1]$. Ajoutons que les deux derniers termes, manifestement impropres, seront employés par pure commodité, et dans ce paragraphe §5 uniquement.

5.2.3. Images tests et tables comparatives

Pour mener à bien cette étude comparative, nous avons essentiellement traité des images numériques 8 bits représentant des objets nets disjoints. La production d'un histogramme d'angles n'est en effet envisageable qu'à partir de données "rasters". De plus, le traitement d'objets aux supports sécants n'est pas clairement abordé dans la littérature. Enfin, la manipulation d'objets

flous est généralement ramenée à celle de leurs α -coupes, qui sont des objets nets (même si le procédé est parfois implicite, comme dans *Miya94b* pour le calcul des histogrammes d'angles^{V8}). Nous utilisons à plusieurs reprises une suite $(I_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'images homothétiques. I_1 représente deux objets. L'un, A_1 , est composé de 2×7 pixels. L'autre, B_1 , de 1×1 pixel seulement (fig.30). Pour tout entier i strictement positif, I_i est l'image homothétique de I_1 , i fois plus large et i fois plus haute. A_1 correspond donc dans I_i à un objet A_i de $2i \times 7i$ pixels et B_1 à un objet B_i de $i \times i$ pixels.

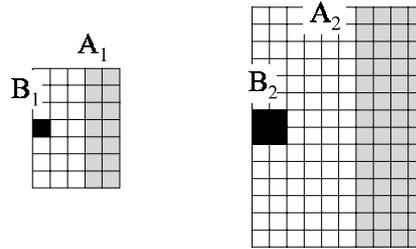
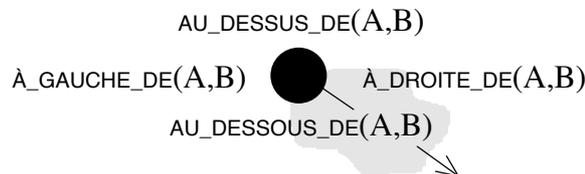


figure 30. I_1 et I_2 : les deux premiers termes d'une suite d'images homothétiques.

Toutes les tables comparatives auxquelles nous faisons référence dans ce paragraphe sont situées à l'annexe C. L'argument A figure invariablement en gris et le référent B en noir. Quatre valeurs sont surajoutées aux représentations pseudo-polaires des histogrammes (§2.5) : $\text{À_DROITE_DE}(A,B)$, $\text{À_GAUCHE_DE}(A,B)$, $\text{AU_DESSUS_DE}(A,B)$ et $\text{AU_DESSOUS_DE}(A,B)$. Elles sont données en centièmes et disposées autour du disque qui symbolise le référent. La flèche indique une direction optimale, c'est-à-dire une direction α_0 telle que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathcal{R}_{\alpha_0}(A,B) \geq \mathcal{R}_{\alpha}(A,B)$.



5.3. Résultats

5.3.1 Sur la discrétisation de l'ensemble des directions

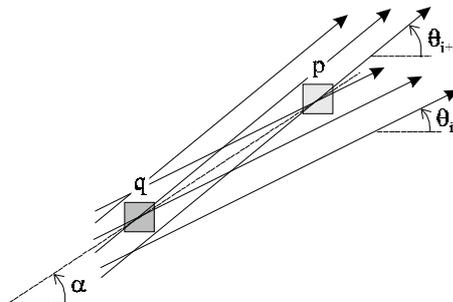


figure 31. Discrétisation de l'ensemble des directions.

Discrétisation a priori (**M0**, **M2**) : le couple (p,q) n'est pas considéré, α n'est pas calculé.

Discrétisation a posteriori (**M**) : (p,q) est considéré, α est calculé puis assimilé à θ_i ou θ_{i+1} .

La construction pratique d'un F-histogramme exige une *discrétisation a priori* de l'ensemble des directions (fig.31) : F^{AB} est représenté par l'application de Θ_v vers \mathbf{R}_+ qui à tout θ associe $F^{AB}(\theta)$ (§4.2). Concernant la construction d'un histogramme d'angles, il est commode d'opérer une *discrétisation a posteriori* : \mathcal{A}^{AB} est représenté par l'application de Θ_v vers \mathbf{R}_+ qui à tout θ associe $\sum_{\alpha \in]\theta-\pi/v, \theta+\pi/v]} \mathcal{A}^{AB}(\alpha)$. La table 1 (annexe C) montre l'impact du choix de v sur les histogrammes d'angles (**M**), les F_0 -histogrammes (**M0**) et les F_2 -histogrammes (**M2**). Notons qu'il serait impossible de distinguer visuellement l'histogramme a) de l'histogramme d'angles réel (c'est-à-dire obtenu sans procéder à une discrétisation a posteriori de l'ensemble des directions). Lorsque v diminue, la forme intrinsèque de l'histogramme d'angles apparaît. Pour v égal à 32, on obtient une courbe dessinée au couteau. Mais la ressemblance avec les F_0 -histogrammes est frappante. Les F_2 -histogrammes sont nettement différents. Bien entendu, le temps de calcul d'un F-histogramme est proportionnel à v . Des tests effectués sur un panel de configurations ont montré qu'il est judicieux de fixer le pas de discrétisation entre 2 et 3 degrés. La valeur adoptée pour le reste de l'étude est par défaut de $2\pi/128$ radian. Comme on peut le constater en examinant les tables 1 et 2, prendre un pas égal à $2\pi/128$ ou à $2\pi/1024$ modifie sensiblement les temps de calcul mais ne semble absolument pas affecter les F-histogrammes.

5.3.2. Isotropie et anisotropie

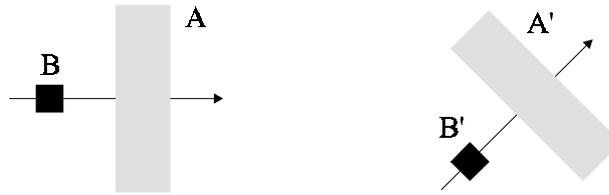


figure 32. *Isotropie et anisotropie. Configurations tests.*
Ne devrait-on pas avoir $F_0^{A'B'}(\pi/4) = F_0^{AB}(0)$ et $\mathcal{A}^{A'B'}(\pi/4) = \mathcal{A}^{AB}(0)$?

La méthode **M0** requiert donc une discrétisation a priori de l'ensemble des directions et la méthode **M** une discrétisation a posteriori (§5.3.1). Ce qui explique en grande partie les différences observables entre les histogrammes a) et d), b) et e), c) et f) de la table 1. Mais d'autres facteurs interviennent. Considérons par exemple les couples d'objets (A,B) et (A',B') de la figure 32. A est l'objet A_{30} de 60×210 pixels (§5.2.3) ; B l'objet B_{30} de 30×30 pixels ; A' et B' se déduisent de A et B par une rotation d'angle $\pi/4$. L'on pourrait s'attendre à ce que les égalités suivantes soient plus ou moins vérifiées :

| | |
|---|---|
| $F_0^{A'B'}(\pi/4) = F_0^{AB}(0)$ | $\mathcal{A}^{A'B'}(\pi/4) = \mathcal{A}^{AB}(0)$ |
| $F_0^{A'B'}(0) = F_0^{AB}(-\pi/4)$ | $\mathcal{A}^{A'B'}(0) = \mathcal{A}^{AB}(-\pi/4)$ |
| $= F_0^{A'B'}(\pi/2) = F_0^{AB}(\pi/4)$ | $\mathcal{A}^{A'B'}(\pi/2) = \mathcal{A}^{AB}(\pi/4) =$ |

Toutes les directions ont en effet le même statut a priori. Les égalités de gauche sont théoriquement garanties. Car : $F_0^{AB} = F_0^{A'B'} \oplus \pi/4$. C'est une conséquence immédiate de la propriété [P24] (équivalente, nous l'avons vu ^{v3}, à [P14]). Mais qu'en est-il des égalités de droite ?

| | |
|---|---|
| $F_0^{A'B'}(\pi/4) \approx 0.98 \times F_0^{AB}(0)$ | $\mathcal{A}^{A'B'}(\pi/4) \approx 0.70 \times \mathcal{A}^{AB}(0)$ |
| $F_0^{A'B'}(0) \approx 1.02 \times F_0^{AB}(-\pi/4)$ | $\mathcal{A}^{A'B'}(0) \approx 1.40 \times \mathcal{A}^{AB}(-\pi/4)$ |
| $\approx F_0^{A'B'}(\pi/2) \approx 1.02 \times F_0^{AB}(\pi/4)$ | $\mathcal{A}^{A'B'}(\pi/2) \approx 1.40 \times \mathcal{A}^{AB}(\pi/4) \approx$ |

Nous travaillons dans l'espace discret. Et nous avons appliqué une rotation aux objets A et B. F_0^{AB} et $F_0^{A'B'} \oplus \pi/4$ ne pouvaient donc pas être parfaitement identiques. La méthode **M0** n'en a pas moins le comportement attendu. Ce qui est loin d'être le cas de **M** ! La figure 33 indique l'origine de la disparité entre **M** et **M0**. Dans le paragraphe §5.1 nous observions que pour tout couple (A,B) d'objets disjoints d'une image numérique, \mathcal{A}^{AB} et F_0^{AB} coïncident en $-\pi/2, 0, \pi/2$ et π . Nous avons aussi ^{V7} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{AB}(\pi/4) &= F_0^{AB}(\pi/4)/\sqrt{2} & \mathcal{A}^{AB}(3\pi/4) &= F_0^{AB}(3\pi/4)/\sqrt{2} \\ \mathcal{A}^{AB}(-\pi/4) &= F_0^{AB}(-\pi/4)/\sqrt{2} & \mathcal{A}^{AB}(-3\pi/4) &= F_0^{AB}(-3\pi/4)/\sqrt{2} \end{aligned}$$

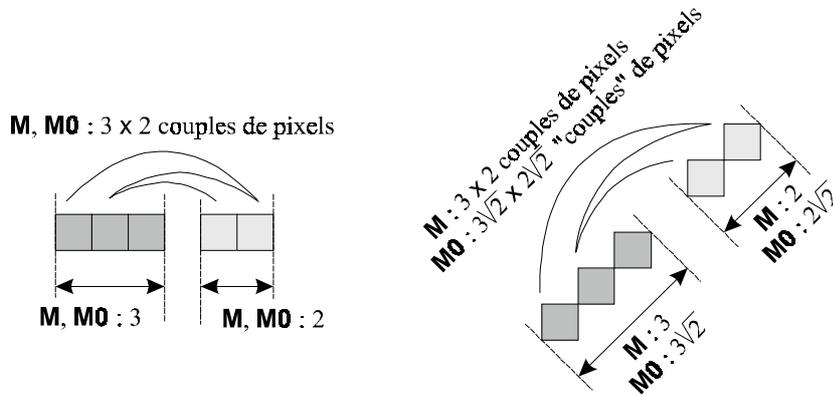


figure 33. Isotropie (**M0**) et anisotropie (**M**). Origine.

5.3.3. Complexité et temps de calcul

La complexité maximale théorique en temps de la méthode **M** est $\mathcal{O}(n^2)$ — où n désigne le nombre de pixels de l'image traitée —, celle des méthodes **M0**, **M2**, etc., est $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$. Plus la surface des objets est grande, plus **M** doit considérer de couples de pixels et moins cette méthode est performante. Plus les sections longitudinales des objets comportent de segments, moins les **Mr** peuvent traiter les couples de pixels par paquets et moins ces méthodes sont performantes. Le pire est atteint lorsque les sections sont des successions ininterrompues de segments d'un pixel. Le cas idéal est celui d'objets convexes. En pratique, même pour une image très bruitée d'objets très tourmentés, de nombreux couples de pixels peuvent être traités par paquets et les méthodes **Mr** sont beaucoup plus efficaces que **M**. Ajoutons qu'un couple de pixel examiné par **M** ne l'est pas forcément par **Mr** : une sélection des couples est en effet réalisée par l'intermédiaire de la discrétisation a priori de l'ensemble des directions (§5.3.1, fig.31). Pour être plus précis, considérons un pixel a d'un objet A et un pixel b d'un objet B. Si a et b sont distincts, le couple (a,b) intervient exactement une fois lors du calcul de l'histogramme d'angles \mathcal{A}^{AB} . Lors du calcul de F^{AB} , ce n'est pas aussi simple. (a,b) peut n'apparaître dans aucun paquet, c'est-à-dire ne pas être sélectionné. Surtout si la distance entre a et b est « élevée » (une appréciation qui dépend du nombre v de directions traitées). Par contre, si la

distance entre a et b est faible, (a, b) peut être sélectionné plusieurs fois (jusqu'à v fois pour des pixels confondus). La figure 34 montre l'effet du facteur zoom sur la proportion des couples de pixels qui sont explicitement ou implicitement considérés par les différentes méthodes.

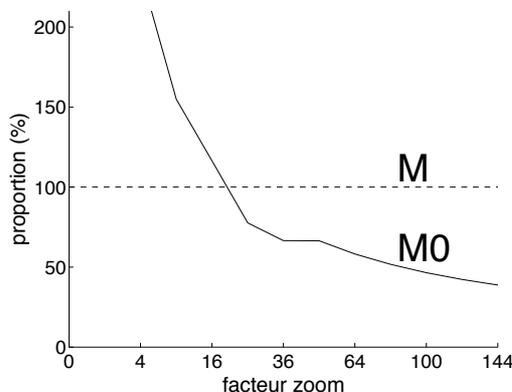


figure 34. Effet du facteur zoom sur la proportion des couples de pixels sélectionnés.

Les images traitées sont homothétiques de I_1 . Le facteur zoom correspond à la surface de l'image considérée — la surface unité étant celle de I_1 , soit 5×7 pixels. Un facteur zoom de 100 correspond donc à une image de 50×70 pixels.

L'implémentation a été réalisée en langage C sur une *Sparc 4* à 100MHz, sans souci prononcé d'optimisation. Par exemple, nous aurions pu tabuler la fonction *arc tangente* (ou plus exactement la primitive $\arctan 2$ du C). Elle est en effet particulièrement coûteuse en temps CPU. Or la méthode **M** fait appel à elle pour chaque couple de pixels considéré. Mais les fonctions f_r auraient également pu être tabulées. D'autres optimisations — telles que celles évoquées dans le paragraphe §4.2.2 (et qui reposent sur le concept de rectangle englobant) — étaient par ailleurs envisageables. Peu importe. Les résultats suivants n'en confirment pas moins que « dans l'absolu », à degré « égal » d'optimisation, les méthodes **Mr** sont incomparablement plus rapides que la méthode **M**. Ainsi, l'image 3 de la table 5 — 170×160 pixels — a été traitée par les méthodes **M0/M2** et **M** en respectivement 3 et 141 secondes CPU. Et l'image homothétique de $2 \times 170 \times 160$ pixels en 6 secondes (2×3) par **M0/M2**, 560 secondes ($2^2 \times 141$) par **M** ! La figure 35 montre l'effet du facteur zoom sur le temps de calcul des différents histogrammes.

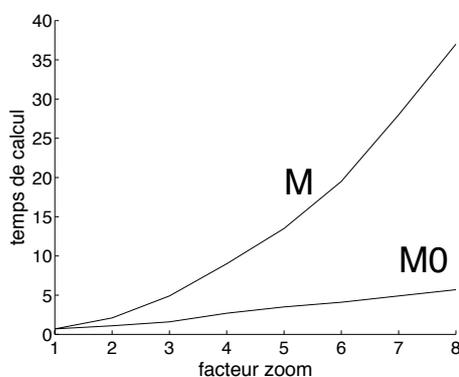


figure 35. Effet du facteur zoom sur le temps de calcul.

Les images traitées sont homothétiques de I_8 . Le facteur zoom correspond à la surface de l'image considérée — la surface unité étant celle de I_8 , soit 40×56 pixels. Un facteur zoom de 8 correspond donc à une image de moins de 120×160 pixels. Le temps unité est la seconde CPU.

5.3.4. Versions “rasters” et versions vecteurs

Contrairement à la méthode **M**, chaque méthode **Mr** est disponible en deux « versions ». Jusqu’à présent, nous avons utilisé implicitement la version « rasters », qui calcule les F-histogrammes selon le schéma décrit dans le paragraphe §4.2.2. La version « vecteurs » les calcule selon le schéma décrit dans le paragraphe §4.2.1. **Mr** est alors de complexité $\mathcal{O}(n \cdot \ln(n))$, où n désigne le nombre total de sommets des objets. Les configurations 2 et 3 de la table 4 par exemple — 16 sommets — ont été traitées en quelques centièmes de secondes CPU par **M0** et **M2**. Représentées au moyen d’images numériques de 180×150 pixels, dans lesquelles les objets occupent moins de 10% de la surface totale, ces mêmes configurations sont traitées en une seconde et demie environ par les versions « rasters ». Il s’avère impossible de distinguer les deux versions d’une méthode **Mr** par un examen visuel des histogrammes obtenus. Illustrons notre propos en faisant appel à la suite $(I_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d’images homothétiques (§5.2.3, fig.30). Les objets A_1 et B_1 correspondent respectivement dans le plan affine à des objets polygonaux A et B . Alors que l’histogramme F_0^{AB} est calculé selon le schéma décrit dans le paragraphe §4.2.1, les $F_0^{A_i B_i}$ le sont évidemment selon le schéma décrit dans le paragraphe §4.2.2. La suite des distances entre F_0^{AB} et $F_0^{A_i B_i}$ converge rapidement vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$. Il en est a fortiori de même de la suite des distances entre les relations directionnelles associées. C’est ce que montrent clairement les graphiques de la figure 36.

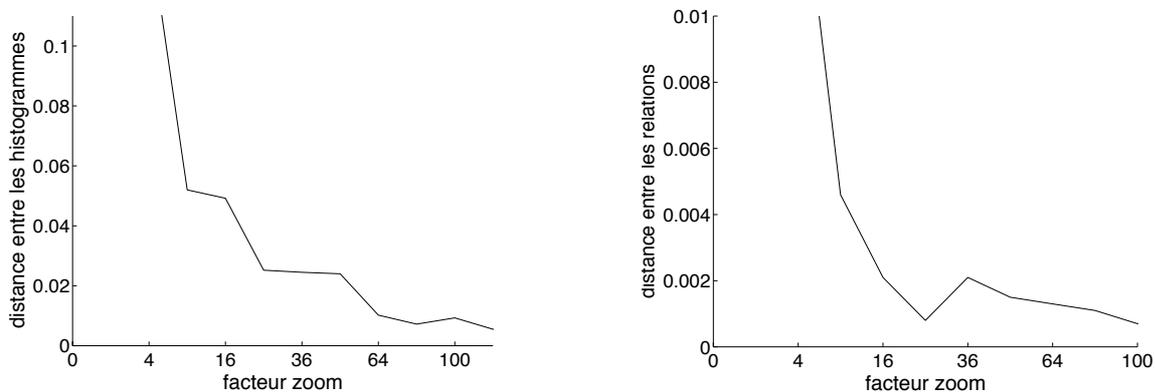


figure 36. Comparaison entre version rasters et version vecteurs de la méthode **M0**.

Les images traitées sont homothétiques de I_1 . Le facteur zoom correspond à la surface de l’image considérée — la surface unité étant celle de I_1 , soit 5×7 pixels. Un facteur zoom de 100 correspond donc à une image de 50×70 pixels.

5.3.5. Autres commentaires sur les tables 1 à 6 (annexe C)

Parmi les méthodes **M**, **M0** et **M2**, la méthode **M2** est la seule à prendre explicitement en compte l’information métrique. Elle produit d’ailleurs des histogrammes bien spécifiques. Comme on peut le constater en consultant les différentes tables, lorsque les configurations sont simples et mettent en jeu des objets aux dimensions analogues, ou lorsque l’argument se trouve suffisamment distant du référent, les résultats obtenus par **M2** d’une part, **M** et **M0** d’autre part, sont comparables. Dans les autres cas, il n’en va plus de même, et le jugement émis par **M2** apparaît systématiquement beaucoup plus adéquat.

⇒ **table 3**

La méthode **M** soutient vite que l'argument A se situe essentiellement à droite du référent B. **M0** finit par rejoindre ce point de vue, mais plus tardivement, et de façon nettement moins tranchée. **M2** est la seule à maintenir que A reste malgré tout au-dessous de B. Lorsque la longueur de l'objet A tend vers l'infini, $A_DROITE_DE(A,B)$ croît vers une valeur limite proche de $1/3$ tandis qu' $AU_DESSOUS_DE(A,B)$ décroît vers une valeur proche de $2/3$. Observons que dans le troisième exemple, **M** juge A plus à gauche de B qu'au-dessous !

⇒ **table 4**

Concernant l'image 1, **M2** est la seule à soutenir que A est plutôt à droite de B, même si elle accorde un crédit certain à la proposition « A est au-dessus de B ». À propos des autres configurations, **M** juge A largement plus au-dessous (voire au-dessus !) de B qu'à droite.

⇒ **table 5**

Concernant les images 1 et 2, **M2** soutient invariablement — avec un certain bon sens — que la maison est située à l'ouest de la rivière. **M** n'est absolument pas de cet avis. Surtout dans le second cas. Elle juge la maison non pas à l'ouest, mais plutôt au sud-est de la rivière. Prenant fortement en compte l'information métrique, **M2** est en fait beaucoup moins sensible que **M** au cadrage de l'image et aux caprices du cours d'eau. C'est évidemment la méthode la plus adaptée au traitement d'objets étendus.

⇒ **table 6**

Si le réel r est nul, la méthode **Mr** (c'est-à-dire **M0**) accorde autant d'intérêt aux parties les plus éloignées des objets qu'aux parties les plus proches. Si r est strictement positif, **Mr** s'intéresse davantage aux parties proches. S'il est strictement négatif, aux parties éloignées. La table 6 est là pour témoigner de ce phénomène et nous rappeler que les F-histogrammes ne se limitent pas aux seuls F_0 -histogrammes et F_2 -histogrammes. Les caractéristiques des fonctions f_r / F_r sont examinées plus en détail dans le paragraphe §6.2.

5.4. Conclusion

Le concept de F-histogramme généralise et supprime celui d'histogramme d'angles. Tout d'abord, parce que F_0 -histogrammes et histogrammes d'angles sont des équivalents théoriques — et un F_0 -histogramme n'est évidemment qu'un F-histogramme particulier. Ensuite, parce qu'en bénéficiant de l'appui du calcul intégral, ce concept assure un traitement incomparablement plus rapide aussi bien de données "rasters" que vecteurs, tout en permettant une prise en compte explicite aussi bien de l'information angulaire que de l'information métrique. Enfin, l'approche axiomatique fonctionnelle apporte de véritables garanties théoriques. Des garanties que n'offrent pas les histogrammes d'angles — une illustration en a été donnée dans le paragraphe §5.3.2.

6. Extensions et ouvertures

Comment représenter la position relative d'objets ? Nous avons posé, pour traiter ce problème, une base à la fois solide et flexible, ouverte sur un large éventail de possibilités. Sa solidité vient du faisceau de propositions que nous avons constitué. Nous allons montrer maintenant, en cinq points indépendants, sa flexibilité et son ouverture.

6.1. Sur le traitement d'objets flous

Prewitt suggéra dès 1970 qu'une segmentation pourrait produire une partition floue de l'image ([Prew70](#)). Depuis, cette idée a donné naissance à de très nombreux travaux. L'algorithme le plus typique de segmentation floue est certainement celui des c-moyennes floues ("Fuzzy C-Means") proposé par Bezdek dans [Bez81](#).

Il est donc important de savoir décrire la position relative de sous-ensembles flous du plan image. Dans ce paragraphe §6.1, n désigne un entier positif non nul ; $(\alpha_i)_{i \in 1..n+1}$ une suite strictement décroissante de réels telle que $\alpha_1=1$ et $\alpha_{n+1}=0$; $(m_i)_{i \in 1..n}$ la suite $(\alpha_i - \alpha_{i+1})_{i \in 1..n}$. Les fonctions d'appartenance de tous les sous-ensembles flous considérés prennent implicitement leurs valeurs dans $\{\alpha_i\}_{i \in 1..n+1}$.

6.1.1. Principe

Définition 11.

Un *objet flou* est un sous-ensemble flou E du plan, non vide, dont toute α -coupe non vide E^α , avec α élément de $]0,1]$, est un objet net. Soit E un objet flou et θ et v deux réels : $E \cap \Delta_\theta(v)$ est un sous-ensemble flou du plan noté $E_\theta(v)$ et appelé *section longitudinale* de E .

Soit F une fonction définie pour le traitement des sections longitudinales d'objets nets. Nous avons vu comment F permet d'associer à un couple d'objets nets une représentation de leur position relative. Nous allons étendre ce mode de représentation aux couples d'objets flous. Le principe est simple : il s'agit de prolonger F sur l'ensemble des triplets $(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$, où θ et v décrivent \mathbf{R} et A et B l'ensemble des objets flous.

Soit donc (A, B) un couple d'objets flous, θ et v deux réels.

Quelle valeur attribuer à $F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$? Ramener le traitement de sous-ensembles flous à celui de leurs α -coupes est une démarche courante. De nombreux schémas de calcul sont envisageables. Nous en considérons deux.

6.1.2. Schéma de la double somme (et gravitation universelle)

Le schéma de la double somme dérive directement du schéma de calcul proposé par Dubois et Jaulent dans [Dubo87](#) pour évaluer les caractéristiques relationnelles de deux régions floues d'une image. Il consiste à poser :

$$F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \cdot F(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_j})$$

soit

$$F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \cdot F(\theta, (A^{\alpha_i})_\theta(v), (B^{\alpha_j})_\theta(v))$$

D'où l'on déduit facilement que :

$$F^{AB} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \cdot F^{A^{\alpha_i} B^{\alpha_j}}$$

La loi de la gravitation universelle cautionne ce schéma de calcul ! Expliquons-nous. En fait, la valeur $F^{AB}(\theta)$ peut être considérée comme la résultante de forces attractives exercées par les points de A sur ceux de B et tendant chacune à déplacer B dans la direction θ (dorénavant, nous dirons d'ailleurs de tout F-histogramme que c'est un *histogramme de forces*). Or cette interprétation physique permet de retrouver le schéma de la double somme. La proposition 10 en est l'expression formelle. Remarquons qu'à l'origine ([Dubo87](#)), le schéma de la double somme est issu de considérations radicalement différentes (essentiellement probabilistes).

Tout point matériel d'un solide I exerce sur tout point matériel d'un solide J une force gravitationnelle élémentaire. Dans la proposition 10, $\mathcal{F}(\theta, I, J)$ dénote la norme de la résultante vectorielle des forces élémentaires qui tendent chacune à déplacer J dans la direction θ . Le lecteur qui aurait oublié ce qui le retient sur Terre pourra consulter par exemple le traité de mécanique générale de Gruber ([Grub88](#)).

Proposition 10.

Soit θ et v deux réels, A et B deux objets (nets ou flous). Assimilons tout sous-ensemble flou inclus dans $\Delta_\theta(v)$ à une tige solide dont la masse spécifique linéaire est définie par la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou. Si les supports de A et B sont disjoints alors :

$$\forall i \in 1..n, \forall j \in 1..n, \mathcal{F}(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_j}) = F_2(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_j})$$

et

$$\mathcal{F}(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \cdot \mathcal{F}(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_j})$$

6.1.3. Schéma de la simple somme (et fantaisies de la nature)

Pour des raisons pratiques, Krishnapuram, Keller et Ma ([Kris93](#)) ont modifié le schéma de calcul proposé par Dubois et Jaulent ([Dubo87](#)). Le schéma de la simple somme dérive directement de cette adaptation. Il consiste à poser :

$$F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot F(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_i})$$

soit

$$F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot F(\theta, (A^{\alpha_i})_\theta(v), (B^{\alpha_i})_\theta(v))$$

D'où l'on déduit facilement que :

$$F^{AB} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot F^{A^{\alpha_i} B^{\alpha_i}}$$

Considérons deux points matériels, l'un de masse r , l'autre de masse s , séparés par une distance d . D'après la loi de la gravitation universelle, chaque point exerce sur l'autre une force égale à $r.s/d^2$ (à une constante multiplicative près). Question saugrenue : et si cette force était égale à $\min(r,s)/d^2$? Rassurons tout de suite le lecteur : le ciel ne lui tombera pas sur la tête. Car nous

nous engageons fermement à conserver le principe d'additivité des forces. Dans ce monde quelque peu fantaisiste, l'interprétation physique avancée §6.1.2 permettrait de retrouver le schéma de la simple somme. Nous pourrions le démontrer comme nous avons démontré que dans *Miya94b*, Miyajima et Ralescu utilisent implicitement le schéma de la simple somme pour associer un histogramme d'angles à un couple de régions floues^{v8}.

6.1.4. En conclusion

Les schémas de calcul décrits précédemment conduisent à une généralisation complète et immédiate de l'étude réalisée dans ce chapitre. Nous pouvons par exemple reprendre l'énoncé des propriétés axiomatiques fondamentales [A1] à [A4], de la définition 6, de la proposition 9, etc., et remplacer tout bonnement « objet net » par « objet flou ». Comme nous l'avons dit, l'ensemble de départ de F devient l'ensemble des triplets $(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$, où θ et v sont des réels et A et B des objets flous. Observons néanmoins que dans l'expression même des propriétés [P9] à [P15], T continue de désigner l'ensemble des triplets $(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$, où A et B sont des objets nets. Car évidemment, tout ce qui touche à la construction de F, aux fonctions f et φ , reste en l'état.

6.2. Vers une prise en compte explicite et modulable de l'information métrique

6.2.1 Introduction au problème

On peut raisonnablement s'attendre à ce que deux objets flous issus d'une segmentation floue soient sécants. Or, si tout couple d'objets est F_0 -évaluable (que ces objets soient nets ou flous), seuls les couples d'objets disjoints sont F_2 -évaluables (§3.3.1, proposition 8). Se pose naturellement la question suivante : existe-t-il une fonction f qui tout en étant insensible aux changements d'échelle, comme f_2 (§3.2.4), autorise la manipulation d'objets sécants ? Plus précisément, existe-t-il une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ , partout définie, possédant [P3] à [P5] et [P8] ? La réponse est non. En tout cas, pas si l'on désire que f soit continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$. C'est un corollaire de la proposition 6 \Leftarrow (§3.2.4) et du fait suivant :

$$\forall (x, z) \in \mathbf{R}_+^{*2}, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} f_2(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln \frac{(x+y)(y+z)}{y(x+y+z)} = +\infty$$

Considérons alors les propriétés [P21] et [P22] ci-après. Ce sont des versions affaiblies respectivement de [P7] et [P8]. [P21] exprime une indépendance vis-à-vis de la distance *en deçà* d'un certain seuil y_0 , [P22] vis-à-vis de l'échelle *au delà* d'un certain seuil y_0 .

[P21] Il existe un réel strictement positif y_0 tel que pour tout quadruplet (x, y_1, y_2, z) de réels positifs, avec y_1 et y_2 non nuls, si f est définie en (x, y_1, z) alors elle l'est en (x, y_2, z) et :
 $(x+y_1+z < y_0$ et $x+y_2+z < y_0) \Rightarrow f(x, y_2, z) = f(x, y_1, z)$

[P22] Il existe un réel strictement positif y_0 tel que pour tout quadruplet (x, y, z, k) de réels positifs, avec y et k non nuls, si f est définie en (x, y, z) alors elle l'est en (kx, ky, kz) et :
 $(ky > y_0$ et $y > y_0) \Rightarrow f(kx, ky, kz) = f(x, y, z)$

Il est possible de trouver une application f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ vérifiant [P3] à [P5] et [P22]. Nous pouvons même contraindre f à satisfaire simultanément [P21] : \bar{f}_2 (présentée §4.1.4) cons-

titue un exemple de telle fonction. Elle a bien sûr été créée dans ce but. Il nous suffisait de la générer à partir d'une combinaison appropriée de φ_0 et φ_2 . Nous faisons évidemment allusion à $\bar{\varphi}_2$ (déjà présentée §4.1.4, mais sous une forme différente) :

$$\forall d \in \mathbf{R}, [(d \leq 0 \Rightarrow \bar{\varphi}_2(d) = \varphi_0(d) = y_0^2 \cdot \varphi_2(d)) \text{ et} \\ (0 < d \leq y_0 \Rightarrow \bar{\varphi}_2(d) = \varphi_0(d)) \text{ et} \\ (y_0 < d \Rightarrow \bar{\varphi}_2(d) = y_0^2 \cdot \varphi_2(d))]$$

S'appuyer sur des éléments de la famille $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$ pour définir des fonctions particulières, comme \bar{f}_2 , voilà l'idée qui est au cœur de ce paragraphe §6.2. Nous en discutons §6.2.2, sous un angle très général. Quant à \bar{f}_2 , constitue-t-elle une réponse acceptable à la question posée plus haut ? Nous examinons cela §6.2.3.

6.2.2. Des fonctions génératrices de référence : les fonctions φ_r

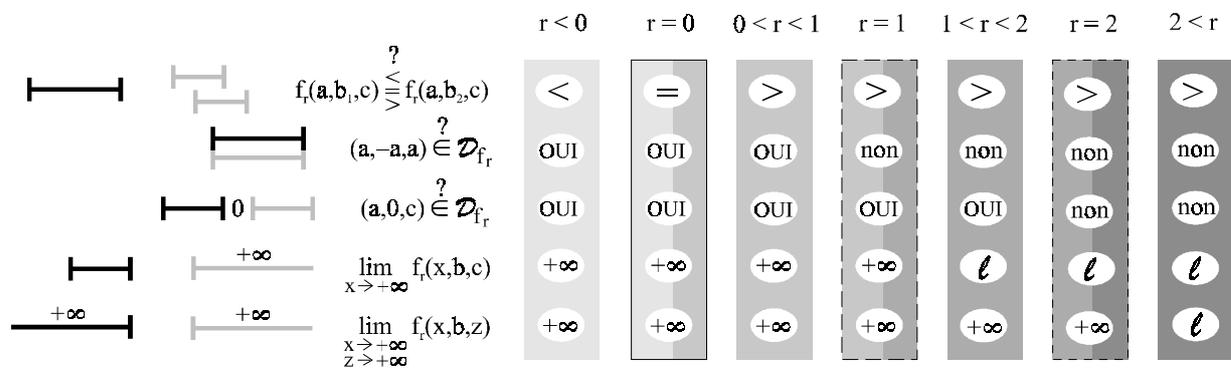


figure 37. Répartition en sept classes des fonctions f_r .
 a, b, b₁, b₂, c désignent des réels strictement positifs tels que : b₁ < b₂.
 \mathcal{D}_{f_r} désigne le domaine de définition de f_r .

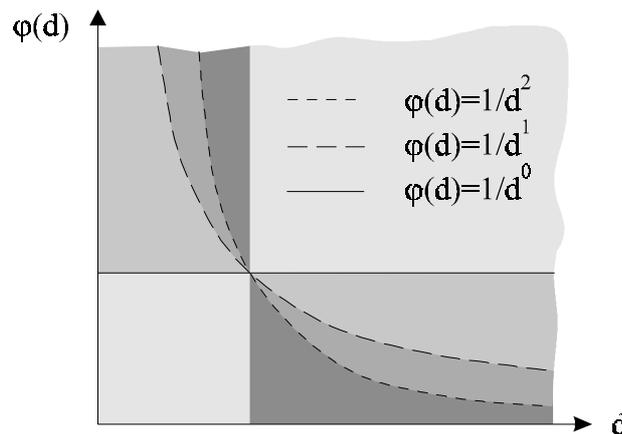


figure 38. Répartition correspondante des fonctions φ_r .

En attribuant aux fonctions φ_r le rôle de fonctions génératrices de référence, nous jetons le principe même d'une prise en compte explicite et modulable de l'information métrique. Une telle prise en compte exige évidemment d'avoir à l'esprit les propriétés que les φ_r induisent sur les f_r . Nous avons réparti les fonctions des deux familles en sept classes (fig.37 et fig.38). Trois points sont à l'origine de cette répartition.

↪ domaine de définition ^{v9}

Toute fonction f_r est définie sur au moins $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ / x=0 \text{ ou } y>0 \text{ ou } z=0 \text{ ou } x+y+z=0\}$. Elle est définie sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ tout entier si et seulement si elle l'est en un triplet du type $(a,-a,a)$, avec a réel strictement positif (fig.37, ligne 2). De la même manière, pour qu'elle soit définie sur l'ensemble des triplets $(a,0,c)$, avec a et c réels strictement positifs, il suffit qu'elle le soit en l'un d'eux (fig.37, ligne 3).

↪ monotonie

Considérons un élément (a,b,c) de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$. Sur cet ensemble, toutes les fonctions f_r sont définies. Les fonctions partielles $f_r(.,b,c)$ et $f_r(a,b,.)$ sont évidemment croissantes sur \mathbf{R}_+ . Quant à la fonction $f_r(a,.,c)$, elle peut être soit strictement croissante, soit constante, soit strictement décroissante sur \mathbf{R}_+^* (fig.37, ligne 1).

↪ limites ^{v9}

Soit (b,c) un élément de \mathbf{R}_+^{*2} (fig.37, lignes 4 et 5) :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_r(x,b,c)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow +\infty}} f_r(x,b,z)$ peuvent être aussi bien finies qu'infinies.

Les questions sous-jacentes peuvent se poser en ces termes : dans la représentation de la position relative de deux objets, veut-on donner plus de poids aux parties les plus éloignées des objets ? ou aux parties les plus proches ? les objets considérés sont-ils susceptibles de se chevaucher ? ou tout au moins d'être en contact ? l'un peut-il être étendu ? ou les deux simultanément ? Notons qu'en fait, il n'y a aucune raison de contraindre un objet net à être borné (mais bien entendu, on n'imposera pas [A1] aux objets non bornés).

6.2.3. Une application : F_2 -histogrammes et objets sécants

\bar{f}_2 constitue évidemment une application de l'idée sur laquelle nous venons de discuter. Nous cherchions §6.2.1 une fonction f réunissant deux caractéristiques : posséder [P8] et autoriser la manipulation d'objets sécants. En combinant de manière appropriée des éléments de la famille $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$, nous avons apporté une solution à ce problème. Car \bar{f}_2 possède [P22], proche de [P8]. Et il est facile de vérifier que tous les couples d'objets sont \bar{F}_2 -évaluables (où \bar{F}_2 est bien sûr la fonction générée par \bar{f}_2). Examinons cette solution de plus près.

□

On peut tout d'abord se demander, au vu du formulaire 3 (page 87), si $\bar{\varphi}_2$ n'aurait pas pu être mieux choisi. Revenons un instant sur ce formulaire. L'expression de $\bar{f}_2(x,y,z)$ dépend de la position de y , $x+y$, $y+z$ et $x+y+z$ par rapport à 0 et y_0 . Elle est toujours de la forme :

$$y_0^2 \cdot \ln \frac{P(x,y,z)}{Q(x,y,z)} + R(x,y,z)$$

où P , Q et R désignent des polynômes en (x,y,z) de degré inférieur ou égal à 2. Pour évaluer $\bar{f}_2(x,y,z)$ connaissant x , y et z on peut estimer qu'« en moyenne » (c'est-à-dire en supposant les vingt cas équiprobables) il faut calculer 1 logarithme, effectuer 3 tests d'infériorité/supériorité, 4 multiplications/divisions, 5 additions/soustractions. Dans le but de faire retomber à six le nombre de cas à envisager, on pourrait adopter comme génératrice une fonction dérivable sur \mathbf{R}_+^* . Par exemple la fonction φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ définie de la façon suivante :

$$\forall d \in \mathbf{R}, [(d \leq 0 \Rightarrow \varphi(d)=0) \text{ et } (0 < d \Rightarrow \varphi(d)=y_0^2 / (y_0^2 + d^2))]$$

φ_0 est asymptote à φ en 0^+ . Et $y_0^2 \cdot \varphi_2$ est asymptote à φ en $+\infty$. La fonction f générée satisferait donc à une quasi indépendance vis-à-vis de la distance et de l'échelle, respectivement en deçà et au delà d'un certain seuil y_0 . On pourrait l'accepter. Mais la diminution de la complexité apparente due à la multiplicité des cas se paierait par une augmentation très sensible de la complexité des calculs, bien réelle celle-là : apparition dans l'expression de $f(x,y,z)$ de plusieurs occurrences de la fonction *arc tangente*, doublement du nombre moyen de multiplications/divisions et d'additions/soustractions à effectuer.

□

Conservons donc \bar{f}_2 . Elle ne satisfait évidemment pas [P6]. Et elle génère une fonction \bar{F}_2 qui ne vérifie pas [P15]. Comment \bar{F}_2 pourrait-elle alors participer à la génération d'une famille de relations binaires floues entre objets, $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$, possédant [A4] ? Nous pouvons apporter à ce problème une solution simple, à défaut d'être élégante : choisir l'unité de longueur en fonction de la taille des objets considérés. Fixons par exemple \bar{f}_2 en attribuant la valeur 1 au seuil y_0 et donnons nous deux réels p_0 et p_1 tels que : $0 < p_0 < p_1$. Notons S_A la surface de l'objet A, S_B celle de l'objet B, $S_{A \cap B}$ celle du domaine $A \cap B$. La nouvelle unité de longueur peut être définie par :

$$d = \max \left(p_0 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \min(S_A, S_B)}{\pi}}, p_1 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot S_{A \cap B}}{\pi}} \right)$$

Chaque racine est le diamètre d'un disque dont la surface égale soit celle du plus « petit » des objets soit celle du domaine $A \cap B$. Si les objets sont « suffisamment » disjoints (selon p_0), f_2 prend en charge l'ensemble du traitement (et la valeur de d n'a en fait plus aucune incidence). Dans le cas contraire, f_2 cède à f_0 une partie du traitement : spécialement « celle » relative à l'intersection $A \cap B$ (selon p_1). Remarquons que le choix du seuil y_0 peut être arbitraire : seuls les produits $y_0 \cdot p_0$ et $y_0 \cdot p_1$ sont significatifs.

6.3. Vers une fusion non additive d'informations

La construction d'un F-histogramme F^{AB} peut se décrire très schématiquement de la façon suivante. Soit θ une direction. Pour tout réel v , l'observateur rattaché à la droite $\Delta_\theta(v)$ collecte un ensemble d'informations, puis les fusionne, produisant ainsi la valeur $F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$. Les différentes valeurs $F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$ sont ensuite recueillies, puis fusionnées à leur tour, ce qui donne $F^{AB}(\theta)$. F^{AB} est donc le résultat de nombreuses fusions d'informations, réparties sur deux niveaux. À chaque niveau correspond un processus de fusion. Le processus de bas niveau est décrit fondamentalement par la propriété [P10], celui de haut niveau par la définition 6 d'un F-histogramme (§3.3.1). Nous pouvons bien sûr les remettre en question. L'un, l'autre, ou les deux. C'est ce que nous illustrons ici, en revenant sur [P10].

6.3.1. L'opérateur *

Nous constatons paragraphe §3.2.1 que l'ensemble T des triplets $(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$, où θ et v décrivent \mathbf{R} et A et B l'ensemble des objets nets du plan, n'est pas commode à manipuler. La proposition 1 \Leftarrow ouvrirait une première brèche dans ce handicap. Adopter la propriété [P10] constituait un moyen trivial de le mettre définitivement à bas. Nous revenons ici sur l'additivité

de F exprimée par [P10]. Nous voulons faire appel, de manière plus générale, à un opérateur $*$ de \mathcal{I}^2 vers \mathcal{I} — où \mathcal{I} désigne un intervalle de \mathbf{R}_+ incluant l'image de f . [P10] devient [P10*] :

[P10*] Soit (θ, I, J) un élément de T . Il existe un ensemble $\{I_i\}_{i \in 1..n}$ de segments deux à deux disjoints, et un seul, tel que : $I = \cup_{i \in 1..n} I_i$. De même, il existe un ensemble $\{J_j\}_{j \in 1..m}$ de segments deux à deux disjoints, et un seul, tel que : $J = \cup_{j \in 1..m} J_j$. F est définie en (θ, I, J) si et seulement si elle l'est en (θ, I_i, J_j) pour tout élément i de $1..n$ et pour tout élément j de $1..m$. Auquel cas : $F(\theta, I, J) = *_{i \in 1..n} *_{j \in 1..m} F(\theta, I_i, J_j)$.

L'opérateur $*$ ne saurait être quelconque.

Il semble légitime de lui imposer les propriétés suivantes ^{∇10} :

$*$ est définie et continue sur \mathcal{I}^2 .

$*$ est commutative, associative et admet 0 comme élément neutre.

Pour tout élément (x, y) de \mathcal{I}^2 , les fonctions partielles $*(\cdot, y)$ et $*(x, \cdot)$ sont croissantes.

L'addition $+$ de \mathbf{R}_+^2 vers \mathbf{R}_+ possède ces propriétés. Elle est en quelque sorte le plus évident des opérateurs $*$ et c'est pourquoi nous l'avons immédiatement adoptée. Mais d'autres opérateurs peuvent être envisagés. En lieu et place de l'addition, nous pourrions considérer notamment une t -conorme continue. Les grandes lignes de l'étude réalisée dans le paragraphe §3 n'en seraient d'ailleurs pas bouleversées. Examinons cela de plus près. D'un point de vue théorique, modifier le processus de fusion de bas niveau ne nous oblige pas à modifier aussi le processus de haut niveau : autrement dit, nous pouvons substituer [P10*] à [P10] sans pour autant revenir sur la définition 6 d'un F-histogramme. Que devient la propriété [P5] ? Elle résultait de [P10] et du souci de préserver la continuité (§3.2.1). [P10] étant délaissée au profit de [P10*], [P5] se voit remplacée par [P5*] :

[P5*] Soit x_1, x_2, y et z quatre réels positifs, avec y non nul. Si f est définie en (x_1, y, z) et (x_2, x_1+y, z) alors elle l'est en (x_1+x_2, y, z) et : $f(x_1+x_2, y, z) = f(x_1, y, z) * f(x_2, x_1+y, z)$.

La proposition $1 \Rightarrow$ tient toujours si dans son énoncé nous substituons [P10*] à [P10] et [P5*] à [P5]. Il est facile de s'en persuader en étudiant la démonstration de la proposition originelle. Venons-en à la définition 5, concernant la génération d'une fonction f à partir d'une fonction φ . Elle ne peut évidemment pas être conservée telle quelle. Les intégrales de Riemann/Lebesgue doivent céder leur place à des intégrales floues, relatives non pas à des mesures additives mais à des mesures floues de Sugeno. On distingue grosso modo trois classes d'intégrales floues : celle des intégrales de Choquet ([\[Choq53\]](#)), celle des intégrales de Sugeno ([\[Suge74\]](#)), celle enfin des intégrales de Weber ([\[Webe84\]](#)). Les t -intégrales floues de Murofushi et Sugeno englobent pratiquement ces trois classes ([\[Muro91\]](#)). Murofushi et Sugeno ont montré par ailleurs qu'à quelques exceptions près, une intégrale floue peut être représentée par une intégrale de Choquet. De même, une intégrale de Choquet peut être représentée par une intégrale de Lebesgue ([\[Muro89\]](#)). Dans le paragraphe §6.3.2, nous montrons sur un exemple qu'en utilisant les résultats déjà obtenus dans ce chapitre (notamment par le calcul d'intégrales de Riemann/Lebesgue), il est facile de générer sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ une fonction f vérifiant [P5*]. Les intégrales implicitement mises en jeu sont celles de Weber, relatives à une mesure floue $*$ -décomposable ([\[Webe84\]](#)).

6.3.2. Exemple

Nous cherchions dans le paragraphe §6.2.1 une fonction f autorisant la manipulation d'objets sécants et insensible, comme f_2 , aux changements d'échelle. Malheureusement, il n'existe pas d'application de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ , possédant [P3], [P4], [P5] et [P8], continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$. Nous avons alors relâché [P8], en lui substituant [P22]. Nous sommes maintenant en mesure de proposer une autre solution. Il s'agit de conserver [P8]. Mais de substituer à l'addition la t-conorme de Lukasiewicz. C'est l'application $\hat{+}$ de $[0,1]^2$ sur $[0,1]$ qui à tout (a,b) associe $\min(1,a+b)$. Désignons par \mathcal{D}_{f_2} le domaine de définition de f_2 et notons \hat{f}_2 la fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, [(x,y,z) \in \mathcal{D}_{f_2} \Rightarrow \hat{f}_2(x,y,z) = \min(1, f_2(x,y,z))] \text{ et } ((x,y,z) \notin \mathcal{D}_{f_2} \Rightarrow \hat{f}_2(x,y,z) = 1)]$$

\hat{f}_2 est une application continue de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant à la fois [P3], [P4], [P5 $\hat{+}$], [P6] et [P8]. Elle génère une application \hat{F}_2 de T vers \mathbf{R}_+ possédant [P10 $\hat{+}$], [P11], [P12], [P13], [P14] et [P15]. Tous les couples d'objets sont \hat{F}_2 -évaluables. Selon la proposition 9 \Rightarrow — dans laquelle [P10 $\hat{+}$] peut être substituée à [P10] —, \hat{F}_2 est donc apte à générer des familles de relations directionnelles partout définies (au sens large décrit §3.1.2). Par rapport à celles déjà présentées, rien de fondamentalement nouveau dans les démonstrations. Le fait que \hat{f}_2 vérifie [P5 $\hat{+}$] est le seul sur lequel il soit intéressant de s'attarder. Sa justification tient dans la propriété ci-après (étant entendu que nous connaissons déjà parfaitement f_2). C'est l'application à $\hat{+}$ d'un résultat concernant l'ensemble des t-conormes continues archimédiennes^{V11} :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}_+^2, \min(1,a+b) = \min(1,a) \hat{+} \min(1,b)$$

6.4. Sur le traitement d'objets convexes

Si seuls les objets convexes doivent être manipulés, il n'y a aucune raison d'imposer la propriété [P10] (ou [P10*]) à la fonction F de traitement des sections longitudinales. À F correspond alors une fonction f ne possédant pas nécessairement [P5] (ni [P5*]). Or cette propriété était passablement réductrice. Ne plus l'exiger agrandit considérablement le champ des possibilités. On trouvera ci-après un exemple de fonction f , partout définie, possédant [P3], [P4], [P6] et [P7] (mais pas [P5]). La figure 39 illustre son comportement.

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, & [y \leq -(x+z)/2 \Rightarrow f(x,y,z) = 0] \text{ et} \\ & [-(x+z)/2 < y \leq 0 \Rightarrow f(x,y,z) = xz(x+2y+z)/(x+z)] \text{ et} \\ & [0 < y \Rightarrow f(x,y,z) = xz] \end{aligned}$$

| $x+2y+z < 0$ | $x+2y+z = 0$ | $y = 0$ | $y > 0$ |
|---|--------------|---------|---------|
| | | | |
| $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow xz \longrightarrow xz$ | | | |

figure 39. Traitement spécifique d'objets convexes.
Tableau de variation de la fonction partielle $f(x, \cdot, z)$, où f est la fonction définie §6.4.

6.5. Vers la troisième dimension

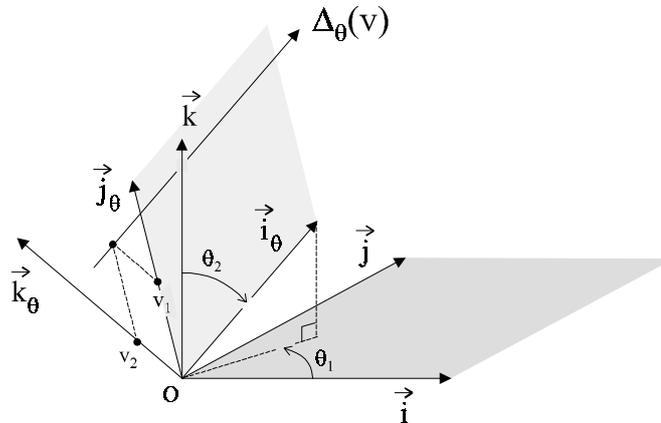


figure 40. Les droites orientées $\Delta_\theta(v)$ dans l'espace de dimension 3.

Bien que nous nous soyons contentés d'œuvrer dans le plan, rien ne s'oppose d'un point de vue théorique à ce que nous nous placions dans un espace de dimension 3. Voyons brièvement comment représenter la position relative d'objets 3D au moyen de F-histogrammes. Soit \mathcal{E} l'espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Considérons deux éléments quelconques θ et v de \mathbf{R}^2 : $\theta=(\theta_1, \theta_2)$ et $v=(v_1, v_2)$. Notons \vec{i}_θ et \vec{k}_θ les vecteurs définis par les triplets de coordonnées sphériques $(1, \theta_1, \theta_2)$ et $(1, \theta_1, \theta_2 - \pi/2)$. Notons ensuite \vec{j}_θ l'unique vecteur faisant de $(O, \vec{i}_\theta, \vec{j}_\theta, \vec{k}_\theta)$ un repère orthonormé direct. Désignons enfin par $\Delta_\theta(v)$ la droite orientée dont le repère est défini par le vecteur \vec{i}_θ et le point de coordonnées cartésiennes $(0, v_1, v_2)$ — relativement à $(O, \vec{i}_\theta, \vec{j}_\theta, \vec{k}_\theta)$ — (fig.40). Qu'est-ce qu'un objet net de \mathcal{E} ? Nous pouvons reprendre pratiquement mot à mot la définition d'un objet net du plan (§3.1.2, définition 2).

Définition 12.

Soit E un ensemble borné non vide de points de \mathcal{E} , égal à l'adhérence de son intérieur ($\overline{E}=E$). Nous dirons que E est un *objet net* de \mathcal{E} si et seulement si :

pour tout élément θ de \mathbf{R}^2 , pour tout élément v de \mathbf{R}^2 ,
 $E \cap \Delta_\theta(v)$ est l'union d'un nombre fini de segments deux à deux disjoints.

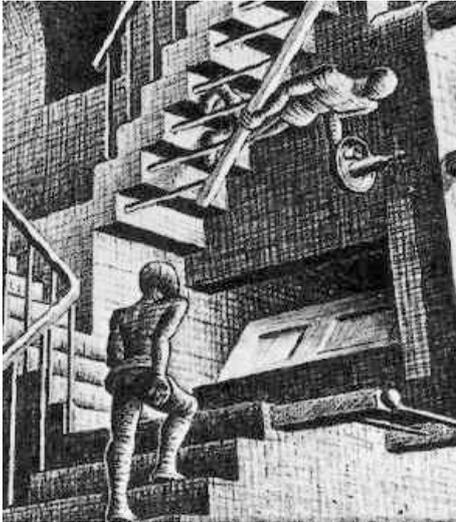
L'ensemble $E \cap \Delta_\theta(v)$ sera noté $E_\theta(v)$: nous dirons que c'est une *section longitudinale* de E .

Cette quasi-identité de forme entre les définitions 2 et 12 préfigure le peu de bouleversements que requiert l'extension de l'étude théorique réalisée dans le paragraphe §3. Donnons quelques exemples de modifications à apporter. Comme nous venons de le voir, un seul réel ne suffit plus à représenter une direction : il en faut deux. Les symétries axiales (dans [A3] et [P14] notamment) cèdent place aux symétries planes. T devient l'ensemble des triplets $(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$, où θ et v décrivent chacun \mathbf{R}^2 et où A et B décrivent chacun l'ensemble des objets nets de \mathcal{E} . À de tels détails près, tout ce qui touche à la construction de F , aux fonctions f et φ , reste en l'état. Soit maintenant (A, B) un couple d'objets nets de \mathcal{E} . F^{AB} doit être redéfinie ainsi :

$$F^{AB} | \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$$

$$\theta \mapsto \iint_{v \in \mathbf{R}^2} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$$

Les représentations pseudo-polaires des F -histogrammes (§2.5) sont donc remplacées par des représentations pseudo-sphériques. Au disque qui symbolisait le référent en dimension 2 est substituée une sphère. Il n'est évidemment pas question en pratique d'évaluer $F^{AB}(\theta)$ pour tout élément θ de \mathbf{R}^2 . Là encore, θ doit décrire un ensemble discrétisé de directions. A priori, pour que l'on puisse obtenir une représentation satisfaisante de la position relative d'objets 3D, cet ensemble Θ doit réunir au bas mot plusieurs centaines d'éléments. Supposons que les objets soient modélisés par énumération spatiale régulière. Pour chaque direction θ de Θ , le calcul de $F^{AB}(\theta)$ contraint v à parcourir les sommets d'un maillage de \mathbf{R}^2 (la taille de ce maillage étant fonction de θ et de la taille des voxels). On le voit, les problèmes posés ne sont pas d'ordre théorique mais pratique. La masse des calculs est telle, que procéder aux optimisations évoquées dans les paragraphes §4.2.2 et §5.3.3 ne suffirait pas à l'absorber. Néanmoins, chaque $F^{AB}(\theta)$ peut être évalué indépendamment des autres. Et pour une direction θ donnée, chaque $F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$ peut aussi être calculé de manière indépendante. Une implémentation réellement efficace — mais sur une machine à architecture parallèle — est donc envisageable.



APPLICATIONS

INTRODUCTION
CONCEPT

Relations directionnelles :
- génération
- étude comparative

CONCLUSION
ANNEXES

7. Génération de relations directionnelles : exemples de fonctions H

La représentation d'une position relative doit permettre à tout le moins d'évaluer les relations directionnelles entre les objets considérés. C'est pourquoi nous avons développé le concept de F-histogramme en nous appuyant sur les propriétés axiomatiques fondamentales [A1] à [A4]. Comme l'indiquent la définition 8 et la proposition 9 \Rightarrow (§3.3.2), trois éléments sont nécessaires à la construction d'une famille de relations directionnelles entre objets : F, H et μ . F est une fonction de traitement des sections longitudinales : elle définit le mode de représentation des positions relatives. H est une application de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$: elle montre comment tirer parti d'une représentation pour évaluer les relations directionnelles. μ sert de référence dans le monde de ces relations : c'est la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points. Nous avons donné différents exemples de fonctions F (§4.1) et μ (§3.1.1). Il est temps de donner quelques exemples d'applications H. H_k^μ et H_M^μ ont été puisées dans la littérature (où elles apparaissent évidemment sous une forme implicite). Le troisième exemple, H^μ , constitue une nouvelle proposition.

7.1. Les fonctions H_K^μ et H_M^μ

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ , H une application de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$, $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ la famille de relations spatiales générée par F et H . Nous avons, pour tout couple (A,B) F -évaluable d'objets : $\mathcal{R}_0(A,B) = H(F^{AB} \oplus 0) = H(F^{AB})$. Les fonctions H que nous allons présenter ci-après vont l'être par le biais de cette égalité. Elles s'appliquent à l'origine sur des histogrammes d'angles, construits à partir de données "rasters". Pour les besoins des paragraphes §7.1.1 et §7.1.2, convenons de quelques notations. A et B sont deux parties floues d'un ensemble fini de points du plan (ensemble auquel peut être assimilé le support d'une image numérique). \mathcal{A}^{AB} est l'histogramme d'angles associé au couple (A,B) (§5.1, définition 10). $\{\theta \in]-\pi, \pi[/ \mathcal{A}^{AB}(\theta) \neq 0\}$ est fini. Nous le supposons non vide. Son cardinal est n , ses éléments sont $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. μ désigne bien sûr la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points.

7.1.1. La fonction H_K^μ

Supposons A et B nets. Dans [Kris93](#), Krishnapuram, Keller et Ma proposent deux méthodes pour le calcul de $\mathcal{R}_0(A,B)$ à partir de \mathcal{A}^{AB} : la méthode dite « de l'angle moyen » et la méthode dite « d'agrégation ». La première consiste à calculer la moyenne $\bar{\theta}$ des $\angle(b,a)$ — où a décrit A , b décrit B et est différent de a — puis à poser : $\mathcal{R}_0(A,B) = \mu(\bar{\theta})$. La seconde consiste à agréger les valeurs $\mu(\theta_i)$ — sachant que chaque $\mu(\theta_i)$ apparaît $\mathcal{A}^{AB}(\theta_i)$ fois. Pour ce faire, les auteurs proposent d'utiliser l'opérateur de moyenne généralisée. Ils expérimentent en particulier la moyenne arithmétique. Auquel cas :

$$\mathcal{R}_0(A,B) = [\sum_{i \in 1..n} \mathcal{A}^{AB}(\theta_i) \cdot \mu(\theta_i)] / \sum_{i \in 1..n} \mathcal{A}^{AB}(\theta_i)$$

Cette égalité nous permet de définir une application H , notée désormais H_K^μ (avec K comme Krishnapuram/Keller). Remarquons que de l'avis même des auteurs, la méthode d'agrégation n'est pas satisfaisante. Aussi recommandent-ils celle de l'angle moyen. Le calcul de $\bar{\theta}$, tel qu'il est brièvement décrit dans [Kris93](#), laisse pourtant dubitatif. Quelle « moyenne » associer par exemple au couple de valeurs $(-5\pi/6, +5\pi/6)$: 0 ou π ? $\angle(b,a)$ ne serait pas la mesure principale de l'angle (\vec{i}, \vec{b}_a) ? Les résultats dépendraient-ils du choix du repère ? Dans des études comparatives postérieures ([Kell95](#), [Kell96](#)) la méthode de l'angle moyen est finalement négligée, au profit de la méthode d'agrégation.

7.1.2. La fonction H_M^μ

Posons : $\langle \mathcal{A}^{AB} \rangle = \mathcal{A}^{AB} / [\max_{i \in 1..n} \mathcal{A}^{AB}(\theta_i)]$. C'est l'histogramme d'angles normalisé. Prenant ses valeurs dans $[0,1]$, il peut être assimilé à un sous-ensemble flou de \mathbf{R} . Soit maintenant λ l'application de $[0,1]$ vers $[0,1]$ telle que :

$$\forall u \in [0,1], \lambda(u) = \sup_{\theta \in \mathbf{R} / u = \mu(\theta)} \langle \mathcal{A}^{AB} \rangle(\theta)$$

λ est la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou défini selon le principe d'extension. Ce sous-ensemble exprime la compatibilité de $\langle \mathcal{A}^{AB} \rangle$ avec le sous-ensemble flou dont la fonction d'appartenance est μ ([Dubo80](#)). Son centre de gravité \bar{u} vaut $[\sum_{j \in 1..m} \lambda(u_j) \cdot u_j] / \sum_{j \in 1..m} \lambda(u_j)$, où m dénote le cardinal de l'ensemble $\{u \in [0,1] / \lambda(u) \neq 0\}$ (qui est fini et non vide) et u_1, u_2, \dots, u_m ses éléments. Dans [Miy94b](#), Miyajima et Ralescu posent : $\mathcal{R}_0(A,B) = \bar{u}$. Cette égalité nous permet de définir une seconde application H , notée désormais H_M^μ (avec M comme Miyajima).

7.2. La fonction H^μ

Dans ce paragraphe §7.2, F désigne une fonction de traitement des sections longitudinales, (A,B) un couple F -évaluable d'objets, μ la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points. De manière générale, comment tirer parti du F -histogramme F^{AB} pour évaluer les relations directionnelles entre A et B ? Dans la lignée des travaux de Miyajima et Ralescu (*Miya94b*), nous pouvons assimiler F^{AB} à un sous-ensemble flou et le confronter, selon un procédé d'approximation linguistique (*Zade75*), avec un jeu prédéfini de sous-ensembles flous (qui représenteraient par exemple la relation « est à droite de », voire « est plutôt sur la droite de », « est très à droite de », etc). Nous pouvons aussi comparer F^{AB} avec des F -histogrammes issus de configurations standard. C'est ce que font Keller et Wang, dans *Kell96*, au moyen de réseaux neuronaux. Ces réseaux reçoivent en entrée des histogrammes d'angles. 56 configurations — 7 seulement aux rotations et réflexions près — sont à la base de l'apprentissage. Comme les paramètres taille, forme, orientation... entrent en ligne de compte, la palette des configurations possibles est bien sûr infiniment plus riche. Et des histogrammes d'aspects a priori très différents doivent pouvoir appeler la même réponse d'une relation directionnelle donnée. Alors qu'est-ce qu'une configuration « standard » ?

a) $\text{_A_DROITE_DE}(A,B)=0$ b) $\text{_A_DROITE_DE}(A,B)=1$ c) $\text{_A_DROITE_DE}(A,B)=1$ d) $0 < \text{_A_DROITE_DE}(A,B) < 1$

figure 41. Comportement attendu de la relation _A_DROITE_DE .

Nous présentons ici une nouvelle application H : l'application H^μ . Pour la définir, nous avons choisi d'opérer directement sur les F -histogrammes. C'est la méthode de l'angle moyen (§7.1.1) qui, dans la littérature, s'apparente le plus à la nôtre. Qu'attend-on exactement des relations directionnelles ? La question est évidemment fondamentale. L'origine de la fonction H^μ tient dans la figure 41. Pour chaque configuration, nous avons formulé un souhait quant à la réponse donnée par _A_DROITE_DE . Libre au lecteur de trouver ce souhait arbitraire : l'arbitraire est de toute façon inhérent au problème traité. Notre objectif va au delà de ce paragraphe. Il est de montrer que le concept de F -histogramme permet de définir des familles de relations directionnelles, qui correspondent à une perception cohérente et rationnelle du monde, mais que le concept d'histogramme d'angles ne permettra jamais de définir (§8).

7.2.1. Les forces contradictoires, compensatoires, efficaces

Pour alléger les notations, posons : $h=F^{AB}$. F^{AB} peut être vu comme un histogramme de forces (§6.1.2). Nous appellerons *force du premier quadrant* (respectivement du *second*, *troisième*, *quatrième*) tout couple $(\theta, h(\theta))$, avec θ élément de $[-\pi, -\pi/2]$ (respectivement $[-\pi/2, 0]$, $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$). Les forces des premier et quatrième quadrants (respectivement des second et troisième) sont autant d'éléments qui, à des degrés divers, viennent infirmer (respectivement appuyer) la proposition « A est dans la direction 0 de B ».

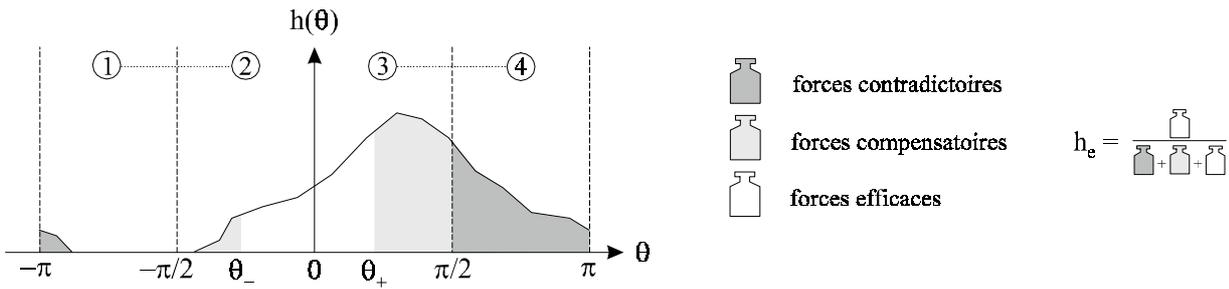


figure 42. Forces contradictoires, compensatoires et efficaces.

Le souhait illustré par la figure 41a nous incite à utiliser des forces du troisième quadrant pour compenser — tant que faire se peut — les forces contradictoires du quatrième. Le taux de ces forces compensatoires est défini par un élément θ_+ de $[0, \pi/2]$ (fig.42). θ_+ est choisi de telle manière que le barycentre du système $\{(\theta, h(\theta))\}_{\theta \in [\theta_+, \pi]}$ soit — lorsqu’il existe et dans la mesure du possible — $(\pi/2, \int_{\theta_+}^{\pi} h(\theta).d\theta)$. Plus précisément :

$$\int_{\pi}^0 (\theta - \pi/2).h(\theta).d\theta \geq 0 \Rightarrow \int_{\pi}^{\theta_+} (\theta - \pi/2).h(\theta).d\theta = 0$$

$$\int_{\pi}^0 (\theta - \pi/2).h(\theta).d\theta < 0 \Rightarrow \theta_+ = 0$$

De façon symétrique (afin de satisfaire [A3]) des forces du second quadrant sont utilisées pour compenser les forces contradictoires du premier. Le taux de ces forces compensatoires est défini par un élément θ_- de $[-\pi/2, 0]$ (fig.42) :

$$\int_{-\pi}^0 (\theta + \pi/2).h(\theta).d\theta \geq 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\theta_-} (\theta + \pi/2).h(\theta).d\theta = 0$$

$$\int_{-\pi}^0 (\theta + \pi/2).h(\theta).d\theta < 0 \Rightarrow \theta_- = 0$$

$\{(\theta, h(\theta))\}_{\theta \in [\theta_-, \theta_+]}$ est l'ensemble des forces efficaces. À ce stade du traitement de h , la valeur maximale pouvant encore être atteinte par $\mathcal{R}_0(A, B)$ — $\hat{A_DROITE_DE}(A, B)$ — est fixée au pourcentage h_e de ces forces (fig.42) :

$$h_e = (\int_{\theta_-}^{\theta_+} h(\theta).d\theta) / (\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta).d\theta)$$

7.2.2. Les composantes optimales et sous-optimales

Les souhaits illustrés par les figures 41b, 41c et 41d nous incitent maintenant à scinder chaque force efficace en deux « composantes » (fig.43). Ces composantes sont déterminées à partir d'un seuil h_s sur lequel nous reviendrons dans quelques instants. L'une, optimale, est utilisée pour soutenir que A est « parfaitement » dans la direction 0 de B. L'autre, sous-optimale, pour soutenir plus prudemment que A est « plutôt » dans la direction 0 de B.

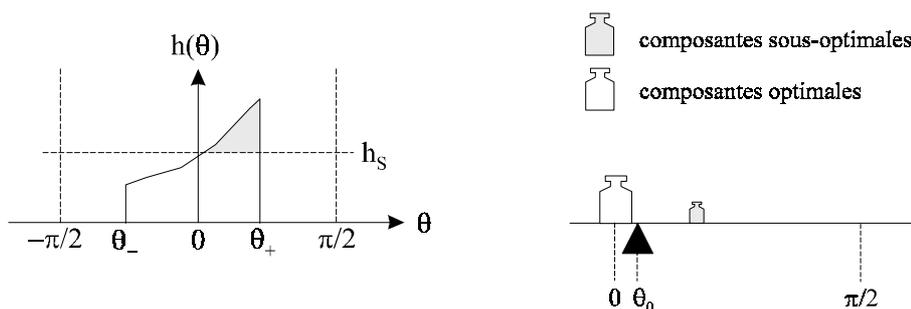


figure 43. Composantes optimales et sous-optimales.

L'ensemble des composantes sous-optimales est assimilé à son barycentre, l'ensemble des composantes optimales à une force unique s'appliquant en zéro. Ce qui nous amène à définir naturellement une direction représentative θ_0 (fig.43). Et nous permet de donner enfin la valeur de $\mathcal{R}_0(A,B)$, c'est-à-dire de $H(h)$:

$$\theta_0 = (\int_{\theta_-}^{\theta_+} \theta \cdot \max(0, h(\theta) - h_s) \cdot d\theta) / (\int_{\theta_-}^{\theta_+} h(\theta) \cdot d\theta) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_0(A,B) = H(h) = \mu(\theta_0) \cdot h_e$$

7.2.3. Le seuil h_s

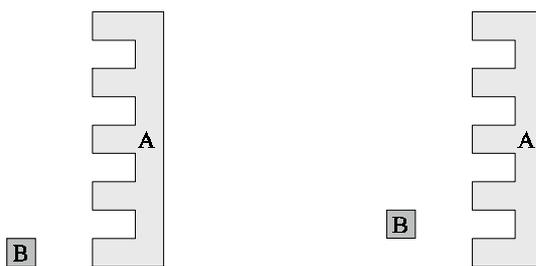


figure 44. L'effet du peigne.

Si h_s était fixé à $h(0)$, $A_DROITE_DE(A,B)$ prendrait la valeur 1 dans le cas a), pourrait prendre une valeur sensiblement inférieure dans le cas b).

Fixer le seuil h_s à 0 ne permettrait pas de répondre au souhait illustré par la figure 41c. Le fixer à $+\infty$ ne permettrait pas d'obtenir 40d. La valeur $h(0)$ semble par contre bien adaptée. Pour des raisons évidentes de robustesse, et afin d'échapper par exemple à « l'effet du peigne » (fig.44), il est toutefois préférable de tenir compte de la valeur de h non pas uniquement en 0 mais dans un voisinage de 0.

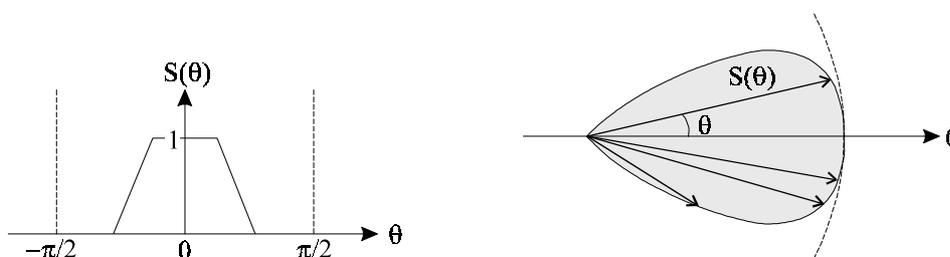


figure 45. Sensibilité directionnelle.

Voilà pourquoi nous avons choisi de recourir à une application S de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[0, 1]$, paire, continue, décroissante sur $[0, \pi/2]$, prenant la valeur 1 en 0, et à laquelle fait référence d'ailleurs la notation indicielle h_s :

$$h_s = (\int_{\theta_-}^{\theta_+} S(\theta) \cdot h(\theta) \cdot d\theta) / (\int_{\theta_-}^{\theta_+} S(\theta) \cdot d\theta)$$

S caractérise la « sensibilité directionnelle ». On peut établir une analogie entre S et la directivité des microphones (cardioïde, hyper cardioïde...) : la sensibilité est maximale dans l'axe et diminue plus ou moins rapidement au fur et à mesure que l'on s'en éloigne (fig.45).

7.3. Conclusion

Il est facile de vérifier que les trois applications H_K^μ , H_M^μ et H^μ partagent avec μ la propriété [P16] et possèdent [P17] et [P18]. D'après la proposition 9 \Rightarrow (§3.3.2), elles peuvent donc participer à la construction de familles de relations directionnelles entre objets qui s'inscrivent dans le cadre décrit par les propriétés axiomatiques [A1] à [A4]. Comme on peut le constater, le concept de F-histogramme se prête avec une grande souplesse à la définition de relations directionnelles et de nombreux outils développés pour l'exploitation des histogrammes d'angles peuvent être réutilisés avec de véritables garanties théoriques. Une illustration partielle de ces propos a déjà été donnée par l'intermédiaire des méthodes **M0** et **M2** (§5), qui font appel à H_M^μ . Nous allons maintenant la compléter.

8. Deuxième étude comparative : relations directionnelles

Nous présentons ici deux nouvelles méthodes d'évaluation des relations directionnelles entre objets. La méthode **F0** s'appuie sur l'exploitation des F_0 -histogrammes et la méthode $\overline{\mathbf{F2}}$ sur celle des $\overline{F_2}$ -histogrammes. **F0** et $\overline{\mathbf{F2}}$ font par ailleurs appel à l'application H^μ , définie §7.2. Nous les confrontons avec trois autres méthodes, désormais classiques : **B**, **K** et **M** (déjà utilisée §5). **B** est la méthode dite barycentrique. **K** a été proposée dans *Kris93* par Krishnapuram, Keller et Ma. **M** l'a été dans *Miya94b* par Miyajima et Ralescu. **K** et **M** s'appuient toutes deux sur l'exploitation des histogrammes d'angles.

Dans ce paragraphe §8, μ désigne la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points (§3.1.1). n désigne un entier positif non nul ; $(\alpha_i)_{i \in 1..n+1}$ une suite strictement décroissante de réels telle que $\alpha_1=1$ et $\alpha_{n+1}=0$; $(m_i)_{i \in 1..n}$ la suite $(\alpha_i - \alpha_{i+1})_{i \in 1..n}$. A et B sont deux parties floues non vides d'un ensemble fini de points du plan (ensemble auquel peut être assimilé le support d'une image numérique). Leurs fonctions d'appartenance sont à valeurs dans $\{\alpha_i\}_{i \in 1..n+1}$, leurs α_i -coupes notées A^i et B^i . Nous nous intéressons à la valeur de vérité de la proposition « A est dans la direction α de B », où α désigne un réel quelconque.

8.1. Outils et méthodes

8.1.1. Présentation des images tests et tables comparatives

Les tables concernées par cette étude sont les tables 7 à 15 situées à l'annexe C. Elles mettent en jeu différents couples d'objets et couvrent un ensemble varié de configurations : chevauchement, coïncidence, inclusion, encerclement... Parmi les méthodes considérées, **M** et **K** n'autorisent la manipulation que de données "rasters". Aussi les images tests sont-elles toutes des

images numériques 8 bits. En pratique, n vaut donc 255 et une transformation linéaire établit la correspondance entre la suite $(i-1)_{i \in 1..256}$ des niveaux de gris et la suite $(\alpha_i)_{i \in 1..256}$ des degrés d'appartenance. Sauf mention contraire, l'argument A est figuré en blanc, le référent B en gris. Pour chaque couple image/méthode quatre valeurs sont calculées : $\text{\AA_DROITE_DE}(A,B)$, $\text{\AA_GAUCHE_DE}(A,B)$, $\text{AU_DESSUS_DE}(A,B)$ et $\text{AU_DESSOUS_DE}(A,B)$. Ces valeurs sont toujours données en centièmes et disposées autour du disque qui symbolise le référent.

$$\begin{array}{ccc} & \text{AU_DESSUS_DE}(A,B) & \\ \text{\AA_GAUCHE_DE}(A,B) & \bullet & \text{\AA_DROITE_DE}(A,B) \\ & \text{AU_DESSOUS_DE}(A,B) & \end{array}$$

8.1.2. Description des différentes méthodes

↳ La méthode B

μ est la fonction triangulaire définie par (§3.1.1, fig.11) : $\forall \theta \in [0, \pi/2]$, $\mu(\theta) = 1 - 2\theta/\pi$. La position de l'objet A relativement à l'objet B est représentée par le couple (a,b) , où a et b sont les barycentres respectifs de A et B . (A,B) est évaluable (§3.1.2, définition 3) si et seulement si a et b sont distincts. Auquel cas :

$$\mathcal{R}_\alpha(A,B) = \mu(\angle(b,a) - \alpha)$$

↳ La méthode K

μ est encore la fonction triangulaire définie par : $\forall \theta \in [0, \pi/2]$, $\mu(\theta) = 1 - 2\theta/\pi$. H est la fonction H_K^μ (§7.1.1). La position de l'objet A relativement à l'objet B est représentée par un n -uplet d'histogrammes d'angles : $(\mathcal{A}^{A^i B^i})_{i \in 1..n}$. À moins que le support de A ne soit égal au support de B et ne corresponde dans l'image à un seul et unique pixel, (A,B) est évaluable. Auquel cas chaque $\mathcal{R}_\alpha(A^i, B^i)$ vaut $H_K^\mu(\mathcal{A}^{A^i B^i} \oplus \alpha)$ et :

$$\mathcal{R}_\alpha(A,B) = \sum_{i \in 1..n} m_i \cdot \mathcal{R}_\alpha(A^i, B^i) = \sum_{i \in 1..n} m_i \cdot H_K^\mu(\mathcal{A}^{A^i B^i} \oplus \alpha)$$

↳ La méthode M

μ est cette fois la fonction définie par : $\forall \theta \in [0, \pi/2]$, $\mu(\theta) = \cos^2(\theta)$. H est la fonction H_M^μ (§7.1.2). La position de l'objet A relativement à l'objet B est représentée par l'histogramme d'angles \mathcal{A}^{AB} . À moins que le support de A ne soit égal au support de B et ne corresponde dans l'image à un seul et unique pixel, (A,B) est évaluable. Auquel cas :

$$\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H_M^\mu(\mathcal{A}^{AB} \oplus \alpha) \stackrel{\forall 8}{=} H_M^\mu((\sum_{i \in 1..n} m_i \cdot \mathcal{A}^{A^i B^i}) \oplus \alpha)$$

↳ La méthode F0

μ est à nouveau la fonction triangulaire : $\forall \theta \in [0, \pi/2]$, $\mu(\theta) = 1 - 2\theta/\pi$. H est l'application H^μ (§7.2). La fonction S caractérisant la sensibilité directionnelle — et qui intervient dans la construction de H^μ (§7.2.3) — est la fonction trapézoïdale définie par :

$$\forall \theta \in [0, \pi/2], (\theta \leq \pi/8 \Rightarrow S(\theta) = 1) \text{ et } (\pi/8 < \theta \leq \pi/4 \Rightarrow S(\theta) = 2 - 8\theta/\pi) \text{ et } (\pi/4 < \theta \Rightarrow S(\theta) = 0)$$

La figure 45 donne la courbe de S : nous avons opté pour une sensibilité « moyenne ». La position de l'objet A relativement à l'objet B est représentée par l'histogramme de forces F_0^{AB} .

Rappelons que F_0 est générée par f_0 (§3.2.4), qui possède [P7]. Pour des raisons pratiques (*Kris93*), nous avons préféré le schéma de la simple somme (§6.1.3) à celui de la double somme (§6.1.2). Le traitement des données de la table 15 — images 200×200 à seulement 50 niveaux de gris effectifs — est environ trois fois plus rapide. Et les résultats obtenus diffèrent de moins de trois centièmes. Il faudrait bien entendu faire une étude comparative approfondie entre les deux schémas de calcul, mais ce n'est pas notre propos. (A,B) est évaluable (aucune condition, car tous les couples d'objets sont F_0 -évaluables). Nous avons :

$$\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H^\mu(F_0^{AB} \oplus \alpha)$$

↳ La méthode $\overline{F2}$

Les fonctions μ et H sont celles utilisées par la méthode **F0**. La position de l'objet A relativement à l'objet B est représentée par l'histogramme de forces \overline{F}_2^{AB} . Rappelons que \overline{F}_2 est générée par \overline{f}_2 (§4.1.4), qui à défaut de posséder [P8] possède [P22] (§6.2.1). Le rôle des paramètres p_0 et p_1 — qui interviennent dans la construction de \overline{F}_2^{AB} (§6.2.3) — incite à attribuer une valeur de l'ordre du dixième à p_0 et de l'unité à p_1 (y_0 étant fixé à 1). 1/5 et 3 définissent à nos yeux une bonne répartition du traitement entre f_0 et f_2 : les tables 11 et 12 permettent de jauger cette répartition. Pour les objets flous, le schéma de calcul est toujours celui de la simple somme. (A,B) est évaluable (aucune condition, car tous les couples d'objets sont \overline{F}_2 -évaluables) :

$$\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H^\mu(\overline{F}_2^{AB} \oplus \alpha)$$

8.2. Résultats

8.2.1. Quelques propriétés discriminantes

Les familles de relations directionnelles associées aux méthodes **B**, **K**, **M**, **F0** et $\overline{F2}$ s'inscrivent toutes dans le cadre décrit §3.1.2. Même si, bien entendu, [A3] et [A4] ne sont pas parfaitement vérifiées (puisque nous travaillons dans l'espace discret). Et nous avons déjà parlé des faiblesses que présente le concept d'histogramme d'angles (§5, et notamment §5.3.2). Les cinq familles ne sont pas pour autant similaires, loin s'en faut. Nous considérons ici quelques propriétés élémentaires, mais discriminantes, mettant en jeu un couple (A,B) évaluable d'objets nets.

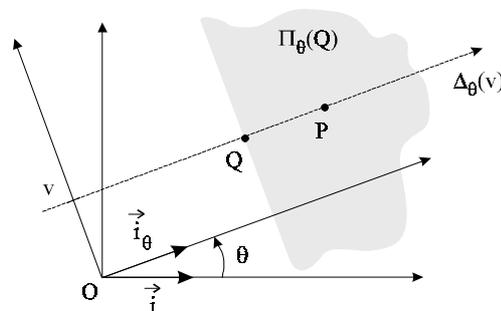


figure 46. Le demi-plan ouvert $\Pi_\theta(Q)$.

Soit θ et v deux réels quelconques, \vec{i}_θ l'image de \vec{i} par la rotation d'angle θ , P et Q deux points de $\Delta_\theta(v)$ tels que : $\overrightarrow{QP} = \vec{i}_\theta$. $\Pi_\theta(Q)$ dénote le demi-plan ouvert contenant P dont la frontière passe par Q et est perpendiculaire à $\Delta_\theta(v)$ (fig.46). Le demi-plan fermé est $\overline{\Pi_\theta(Q)}$.

| | | B | M | K | F0 | $\overline{\mathbf{F2}}$ |
|---|---|----------|----------|----------|-----------|--------------------------|
| ① | $(\forall(M,N) \in A \times B, M \notin \Pi_\alpha(N)) \Rightarrow \mathcal{R}_\alpha(A,B)=0$ | OUI | OUI | OUI | OUI | OUI |
| ② | $\mathcal{R}_\alpha(A,B)=0 \Rightarrow (\forall(M,N) \in A \times B, M \notin \Pi_\alpha(N))$ | non | OUI | OUI | non | non |
| ③ | $\mathcal{R}_\alpha(A,B)=1 \Rightarrow (\forall(M,N) \in A \times B, M \in \Pi_\alpha(N))$ | non | OUI | OUI | OUI | OUI |
| ④ | $(\forall(M,N) \in A \times B, M \in \overline{\Pi_\alpha(N)}) \Rightarrow \mathcal{R}_\alpha(A,B)=1$ | non | non | non | non | non |

Une manière d'exprimer la propriété ① pourrait être : « si tout point de A se situe à gauche de tout point de B, A n'est pas du tout à droite de B ». Et une manière d'exprimer la propriété ③ : « A ne peut être totalement à droite de B que si tout point de A se situe à droite de tout point de B ». L'image 3 de la table 10 constitue un contre-exemple de ② pour **B**, **F0** et $\overline{\mathbf{F2}}$, et un contre-exemple de ③ pour **B**. Quelle que soit la méthode utilisée, si $\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ vaut 1 alors $\mathcal{R}_\alpha(B,A)$ — c'est-à-dire $\mathcal{R}_{\alpha+\pi}(A,B)$ (d'après [A2]) — vaut 0. Autrement dit, si A est tout à fait à droite de B, il n'est pas du tout à gauche de B. Par conséquent, si A est un peu à droite de B, il n'est pas totalement à gauche de B (contraposée). Bien entendu, il est tout à fait possible d'avoir $\mathcal{R}_\alpha(A,B)=0$ et $\mathcal{R}_\alpha(B,A)=0$ (ni à droite, ni à gauche). D'ailleurs, dans la plupart des cas, $\mathcal{R}_\alpha(A,B)=0$ ou $\mathcal{R}_\alpha(B,A)=0$. Avec toute autre méthode que **B**, la négation aussi peut être vérifiée : $\mathcal{R}_\alpha(A,B) \neq 0$ et $\mathcal{R}_\alpha(B,A) \neq 0$ (à la fois à droite et à gauche). Le cas est fréquent avec **K** et **M** : $\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ et $\mathcal{R}_\alpha(B,A)$ peuvent même prendre simultanément des valeurs élevées (tables 10 à 13). Le cas est beaucoup plus rare avec **F0** et $\overline{\mathbf{F2}}$. S'il survient, l'une au moins des valeurs $\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ et $\mathcal{R}_\alpha(B,A)$ reste très faible (image 1 de la table 13). À moins que la configuration ne soit extrêmement particulière, et mette par exemple en jeu un objet non connexe. Une dernière remarque avant de clore ce paragraphe. En pratique, **K** et **M** proscrivent l'égalité $\mathcal{R}_\alpha(A,B)=1$. Car pour ces deux méthodes :

$$\mathcal{R}_\alpha(A,B)=1 \Leftrightarrow (\forall(M,N) \in A \times B, \angle(N,M) = \alpha [2\pi])$$

8.2.2. Autres points et caractéristiques

↳ Concernant la méthode **B**

La méthode **B** a de nombreux avantages : elle est particulièrement simple à implémenter, assure un traitement très rapide aussi bien d'objets nets que flous, de données "rasters" que vecteurs. Mais globalement, comme l'ont déjà signalé de nombreux auteurs, les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants. Nous formulons ici deux critiques. Si (A,B) est évaluable, A est parfaitement dans la direction $\angle(b,a)$ de B (où a désigne le barycentre de A et b le barycentre de B). Autrement dit, et en posant $\beta = \angle(b,a)$: $\mathcal{R}_\beta(A,B)=1$. Le fait qu'un tel angle optimal existe inmanquablement est une propriété bien inopportune et peut facilement conduire à des inepties. D'autre part, dans certains cas, a et b peuvent être jugés distincts à tort (problèmes inhérents à la discrétisation des données, approximation des calculs...) : $\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ est alors susceptible de prendre une valeur aléatoire. La table 10 (images 3 et 4) illustre bien ces dires.

↳ Concernant la méthode **K**

L'objet A n'est pas vide. Mais a priori, si les sous-ensembles flous ne sont pas systématiquement normalisés, A^i peut l'être. Auquel cas l'application $\mathcal{A}^{A^i B^i}$ est nulle, et la seule valeur que puisse raisonnablement prendre $H_K^u(\mathcal{A}^{A^i B^i} \oplus \alpha)$ est 0.

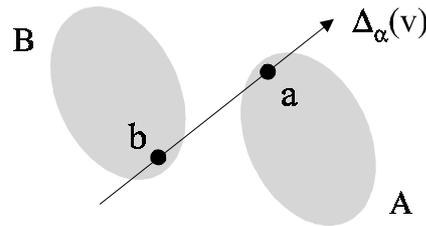


figure 47. La méthode **K** et le traitement des sous-ensembles flous. $\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ dépend excessivement du seul degré d'appartenance $\mu_A(a)$.

Considérons les sous-ensembles flous A et B représentés par la figure 47. Notons μ_A et μ_B leurs fonctions d'appartenance, $\text{supp}(A)$ et $\text{supp}(B)$ leurs supports (les deux ovales). μ_B prend la valeur $\frac{1}{2}$ en tout point de $\text{supp}(B)$, sauf en b où elle prend la valeur 1. μ_A prend la valeur $\frac{1}{2}$ en tout point de $\text{supp}(A)$, sauf peut-être en a . Que l'on décide ou non de normaliser A et B avant les calculs, $\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ dépend excessivement du seul degré $\mu_A(a)$. Si $\mu_A(a)$ est égal à 1 par exemple, le couple (a,b) intervient dans l'évaluation de $\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ avec autant de poids que l'ensemble de tous les autres couples de $\text{supp}(A) \times \text{supp}(B)$. Le cas est radicalement différent si $\mu_A(a)$ est égal à $\frac{1}{2}$. Bien que le schéma de la simple somme dérive du schéma de calcul utilisé par la méthode **K** (§6.1.3), il consiste non pas à déduire la valeur $\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ des valeurs $\mathcal{R}_\alpha(A^i, B^i)$, mais l'histogramme associé à (A,B) des histogrammes associés aux (A^i, B^i) . Un moyen bien plus robuste de traiter les objets flous. Un moyen d'ailleurs adopté à la fois par **M**, **F0** et **F2**.

↳ Concernant la méthode **M**

Nous le remarquons dans le paragraphe §8.2.1, il n'est pas rare avec les méthodes **K** et **M** d'obtenir pour $\mathcal{R}_\alpha(A,B)$ et $\mathcal{R}_\alpha(B,A)$ des valeurs simultanément non nulles (voire élevées). Le fait est que **M** situe facilement A « un peu partout » (**K** aussi, mais dans une moindre mesure). Considérons par exemple l'image 2 de la table 10. **M** juge A (pratiquement) autant au-dessus et au-dessous de B qu'à gauche de B . A n'est d'ailleurs pas jugé (beaucoup) plus à gauche de B dans l'image 2 que dans l'image 4. Ce point de vue quelque peu singulier peut être nuancé, mais il est nécessaire pour cela de consulter $\hat{A}_{\text{DROITE_DE}}(A,B)$. Comme si de l'ensemble des valeurs $\hat{A}_{\text{GAUCHE_DE}}(A,B)$, $\hat{A}_{\text{DROITE_DE}}(A,B)$, etc., il fallait encore déduire la valeur « définitive » de $\hat{A}_{\text{GAUCHE_DE}}(A,B)$. Autre exemple. Considérons l'image 1 de la table 13. **M** (et **K**) nous laissent à penser que l'habitation se trouve plutôt au sud de la rivière... ou peut-être au nord (!). En tout cas, certainement pas à l'ouest.

↳ **K**, **M**, et les relations de Kóczy

Dans Kocz88 , l'évaluation d'une relation directionnelle entre deux objets A et B repose sur le calcul d'un rapport de surfaces. Si A et B sont nets et si B est assimilable à un point vis-à-vis de A , cette évaluation consiste pratiquement à déterminer la proportion de l'objet A se trouvant dans un demi-plan dont la frontière Δ passe par B . C'est une modélisation assez simpliste, mais dont on retrouve un peu la marque dans des familles très diverses de relations directionnelles. Notamment dans celles associées aux méthodes **K** et **M**. Observons d'ailleurs qu'avec **K** la somme $\hat{A}_{\text{DROITE_DE}}(A,B) + \hat{A}_{\text{GAUCHE_DE}}(A,B) + \text{AU_DESSUS_DE}(A,B) + \text{AU_DESSOUS_DE}(A,B)$ vaut 1. Elle vaut également 1 avec **B**, est supérieure ou égale à 1 avec **M**, peut être aussi bien supérieure à 1 qu'inférieure à 1 avec **F0** et **F2**.

↳ Concernant les méthodes **F0** et $\overline{\mathbf{F2}}$

Les relations directionnelles associées aux méthodes **F0** et $\overline{\mathbf{F2}}$ veulent résolument se démarquer des relations de Kóczy. Elles ne conçoivent pas non plus que l'argument puisse être « un peu partout ». Elles estiment que la fonction du quadruplet ($\overline{\text{À_DROITE_DE}}(A,B)$, $\overline{\text{À_GAUCHE_DE}}(A,B)$, $\overline{\text{AU_DESSUS_DE}}(A,B)$, $\overline{\text{AU_DESSOUS_DE}}(A,B)$) n'est pas de représenter à lui tout seul la position relative des objets A et B. Considérons par exemple l'image 4 de la table 10. Qu'une partie de l'argument se trouve à gauche du référent, c'est possible. Les histogrammes F_0^{AB} et $\overline{F_2}^{AB}$ le montreront d'ailleurs très bien. Il n'empêche qu'à la question « la couronne est-elle située à gauche du disque ? », la réponse est définitivement « non ! ». La couronne ne se trouve ni à gauche, ni à droite, ni au-dessus, ni au-dessous du disque. Elle l'entoure. Mais il n'incombe pas aux relations directionnelles de le dire. Considérons maintenant l'image 1 de la table 8. Si A n'est pas parfaitement au-dessous de B dans ce cas-là, *quand* donc un objet est-il au-dessous d'un autre !? Et pourquoi faut-il qu'en prolongeant A sur « sa » droite, le jugement porté par **B**, **K** et **M** soit aussi rapidement et radicalement modifié (image 2) ? Historiquement, nos recherches sur la représentation de la position relative d'objets ont été motivées par ces deux questions. Souvenons-nous de la figure 18b (§3.2.4). Elle illustre la propriété [P8], à l'origine des F_2 -histogrammes (et $\overline{F_2}$ -histogrammes). Souvenons-nous également de la figure 41 (§7.2). Les souhaits formulés sont d'ailleurs bien réalisés par $\overline{\mathbf{F2}}$: on peut le constater en compulsant les résultats associés à l'image 1 de la table 7, aux images 2 et 3 de la table 8, à l'image 4 de la table 9. Quant à **F0**, elle ne répond pas au souhait exprimé par la figure 41c. Mais elle ne s'appuie pas non plus sur l'exploitation des F_2 -histogrammes (ou $\overline{F_2}$ -histogrammes).

8.2.3. Derniers commentaires sur les tables 7 à 15 (annexe C)

Nous nous sommes déjà penchés dans le paragraphe §5 sur la plupart des configurations présentées par les tables 8, 9, 13 et 14. Bon nombre des remarques formulées §5.3.5 à l'adresse de **M** — respectivement **M2** — peuvent être reformulées ici à l'adresse de **M** et **K** — respectivement $\overline{\mathbf{F2}}$. Car les méthodes **M** et **K**, qui s'appuient toutes deux sur l'exploitation des histogrammes d'angles, ont souvent des réactions similaires (du moins qualitativement). Il existe également des points communs entre les méthodes **M2** et $\overline{\mathbf{F2}}$, qui s'appuient elles sur l'exploitation des F_2 -histogrammes (ou $\overline{F_2}$ -histogrammes).

⇒ table 7

Pour ces configurations simples, les résultats obtenus par les différentes méthodes sont comparables. Et d'autant plus voisins que l'argument s'éloigne du référent : toutes les méthodes ont en effet tendance à assimiler à des points les objets suffisamment distants (propriété [A1]).

⇒ table 8

$\overline{\mathbf{F2}}$ est la seule méthode à maintenir que A reste essentiellement au-dessous de B, même si elle reconnaît que A s'étale sur la droite. Lorsque la longueur de A tend vers l'infini, $\overline{\text{AU_DESSOUS_DE}}(A,B)$ décroît vers une valeur très proche de 1, fonction de la sensibilité directionnelle (§7.2.3).

⇒ table 9

Sauf sur la dernière configuration, les opinions de **F0** et $\overline{\mathbf{F2}}$ se rejoignent. $\overline{\mathbf{F2}}$ est évidemment beaucoup plus incisive : de par sa nature, elle prend fortement en compte l'information métrique et est très réceptive aux différences de distances entre les diverses parties des objets.

⇒ **table 13**

Observons le comportement de la méthode **F0** : les opinions défendues fermement sont on ne peut plus rationnelles (images 1 et 2), celles où s'imisce le doute sont exprimées sans grande conviction (images 3 et 4).

⇒ **table 14**

Les bons élèves vous le diront : l'Espagne est au sud de la France. Et vous ne leur ferez certainement pas croire qu'elle est à l'ouest. En les titillant un peu, ils conviendront, tout au plus, qu'elle s'*étale* vers l'ouest. **F0** et **F2** partagent ce point de vue mieux que les autres méthodes, avec beaucoup plus de constance et de conviction. Notons que les valeurs attribuées par **F2** sont remarquablement stables : **F2** se réfère en effet fortement au tracé même de la frontière franco-espagnole et est moins sensible que ses consœurs au choix de la fenêtre de traitement.

⇒ **table 15**

Les configurations mettant en jeu des objets flous sont impropres à l'obtention de résultats éloquents. D'autre part, comme nous l'avons vu, le traitement d'objets flous pour l'évaluation de relations directionnelles est généralement ramené à celui de leurs α -coupes. C'est pourquoi nous nous sommes appuyés, afin d'éclairer cette étude comparative, sur un ensemble de configurations mettant exclusivement en jeu des objets nets. Il n'en reste pas moins que toutes les méthodes considérées — **B**, **K**, **M**, **F0**, **F2**, mais aussi **M0** et **M2** (§5) — peuvent effectivement manipuler des objets flous. La table 15 est là pour le rappeler. Les résultats obtenus, on peut le constater, sont sans surprise à ce stade de l'étude.

8.3. Conclusion

Les F-histogrammes constituent un puissant outil de représentation, qui se prête avec une grande souplesse à la définition de relations directionnelles. Nous l'avons copieusement illustré dans ce chapitre en proposant trois nouvelles familles de relations : celles associées aux méthodes **M2** (§5), **F0** et **F2**. Par ailleurs, comme histogrammes d'angles et F_0 -histogrammes sont des équivalents théoriques (§5), toute famille de relations directionnelles dont la définition originale s'appuie sur le concept d'histogramme d'angles peut être (avantageusement) redéfinie à partir du concept de F-histogramme : c'est ainsi par exemple que la méthode **M0** (§5) dérive directement de la méthode **M** de Miyajima et Ralescu. À travers l'étude comparative réalisée ici, nous avons énoncé en quelque sorte une réciproque : le concept de F-histogramme permet de définir des familles de relations directionnelles, qui correspondent à une perception cohérente et rationnelle du monde, mais que le concept d'histogramme d'angles ne permettra jamais de définir. Pour clore ce paragraphe, nous invitons le lecteur à prendre connaissance d'autres travaux dans le domaine de l'évaluation des relations directionnelles entre objets. Notamment en consultant [Kell95](#), [Kell96](#), [Bloc96](#), [Bloc97](#), [Gade97](#)... Notons que selon les approches proposées, neuronales ou morphologiques, il n'est pas toujours nécessaire de disposer (même implicitement) d'une représentation de la position relative des objets.

INTRODUCTION
CONCEPT
APPLICATIONS
CONCLUSION
ANNEXES



9. Conclusion



Dans le domaine de la vision par ordinateur, il est essentiel de savoir appréhender l'organisation spatiale d'objets bidimensionnels. À l'heure actuelle, un histogramme d'angles constitue certainement le moyen le plus achevé de représenter la position relative de deux objets. De nombreux travaux s'appuient, de manière plus ou moins explicite, sur ce mode de représentation.

Nous avons développé dans ce chapitre un nouveau concept : celui de *F-histogramme* (ou *histogramme de forces*). La construction d'un tel histogramme est réalisée en ramenant la manipulation des objets (entités de dimension 2) à celle de leurs sections longitudinales (entités de dimension 1), non pas à celle de points (entités de dimension 0). Il est ainsi possible de bénéficier de la puissance du calcul intégral et d'assurer un traitement incomparablement plus rapide

aussi bien de données vecteurs que “rasters”, d’objets flous que nets, tout en tenant compte aussi bien de l’information métrique que de l’information angulaire. Typiquement, une représentation de la position relative de deux objets est utilisée pour évaluer les relations spatiales directionnelles entre ces objets. Nous sommes partis de ce constat en adoptant une démarche axiomatique fonctionnelle rigoureuse. Aussi le concept de F-histogramme offre-t-il de solides garanties théoriques. Son ouverture et sa flexibilité en font par ailleurs une réelle plateforme d’exploration dans le domaine de la représentation de la position relative d’objets.

□

Une première application des F-histogrammes est évidemment la génération de relations directionnelles. Et ils s’y prêtent avec une grande souplesse. Comme nous l’avons vu tout au long de ce chapitre, les familles de relations directionnelles dont la définition originelle s’appuie sur le concept d’histogramme d’angles peuvent être avantageusement redéfinies à partir du concept de F-histogramme. Des familles foncièrement nouvelles peuvent également être générées : des familles qui correspondent à une perception cohérente et rationnelle du monde, mais auxquelles le concept d’histogramme d’angles ne donnera jamais le jour. Car il s’avère indispensable de pouvoir tenir compte de l’information métrique, et seuls les histogrammes de forces répondent à cette nécessité. Nous avons proposé une prise en compte explicite et modulable de l’information métrique, se traduisant par le choix d’une fonction numérique à variable réelle φ . Nous avons indiqué comment opérer ce choix en se référant à une famille $(\varphi_r)_{r \in \mathbf{R}}$ de fonctions rationnelles élémentaires.

Mais les relations spatiales ne se limitent pas aux seules relations directionnelles. D’ailleurs, il n’est pas toujours nécessaire de décrire la position relative de deux objets en termes de relations spatiales. On sait par exemple que le problème de la reconnaissance d’objets peut être abordé en décrivant les objets sous forme de graphes valués ([Wend97](#), [Krou97...](#)). Chaque sommet correspond à une composante de l’objet et est représenté par un ensemble de paramètres (surface, compacité, couleur...). Chaque valuation est chargée d’indiquer la position relative des composantes connectées. L’identification d’un objet consiste à confronter son graphe avec les graphes de prototypes rassemblés dans une base de données. On peut envisager non seulement de valuer chaque arc par un F-histogramme, mais aussi de représenter chaque sommet par un tel histogramme : le F-histogramme associé au couple (A,A) constitue en effet une description de l’objet A (nous parlerons de la *F-signature* de A). Les deux dernières tables de l’annexe C illustrent nos propos.

⇒ Les images de la table 16 montrent des dessins d’orbites de crânes. Les experts distinguent principalement quatre classes d’orbites : rectangulaires, elliptiques, trapézoïdales, rondes. Les images supérieures exhibent des prototypes de ces classes. Les deux images inférieures montrent des dessins d’orbites (et de sinus) réalisés à partir de crânes datant du troisième siècle et trouvés lors de fouilles au Soudan. Wendling classifie ces orbites en faisant appel au concept de F-histogramme ([Wend97](#)). Les F_2 -histogrammes associés aux couples d’orbites à classer sont comparés aux F_2 -histogrammes associés aux prototypes. La méthode s’est avérée plus efficace que le calcul de paramètres comme le degré de rectangularité ou d’ellipticité. Signalons que divers outils peuvent être utilisés dans le but de confronter deux histogrammes de forces : le lecteur trouvera par exemple dans [Asch92](#) une étude comparative portant sur de nombreuses mesures de corrélation.

⇒ La table 17 évoque le problème complexe de la reconnaissance de caractères manuscrits. Une approche classique consiste à isoler les caractères, mettre en évidence leurs différentes composantes, puis étudier les positions relatives de ces composantes. C'est l'approche adoptée par exemple dans *Anis97*, où les auteurs proposent de décrire chaque caractère comme un ensemble de segments, arcs, points... Le principe reste le même dans *Chen97*. Il s'agit cette fois de reconnaître des caractères chinois. Le travail des auteurs repose sur une constatation : si la forme des différents traits qui constituent un caractère peut sensiblement varier d'une occurrence à l'autre, les relations spatiales entre ces traits sont conservées. Aborder le problème de la reconnaissance de caractères en faisant appel au concept de F-histogramme paraît donc tout à fait sensé. La table 17 est l'occasion pour nous de montrer quelques F-signatures. Il s'agit plus précisément ici des F_{-2} -signatures de caractères scannés. Certains de ces caractères étaient imprimés (prototypes), d'autres manuscrits.



Le concept de F-histogramme généralise et supprime celui d'histogramme d'angles. Il le généralise par le biais des F_0 -histogrammes. Tous les outils dédiés à l'exploitation des histogrammes d'angles et décrits çà et là dans la littérature peuvent donc être réutilisés. Il le supprime aussi, car il s'affranchit de ses faiblesses : incapacité de prendre explicitement en compte l'information métrique, traitements coûteux, et uniquement de données "rasters", anisotropie, etc. Le concept de F-histogramme offre en définitive un puissant moyen de représentation, aux nombreuses applications potentielles. Ramener la manipulation des objets à celle de leurs sections longitudinales et adopter une approche axiomatique fonctionnelle est une démarche qui nous semble porteuse, appelée à dépasser le cadre dans lequel nous l'avons expérimentée.



A
 INTRODUCTION
 N
 CONCEPT
 E
 APPLICATIONS
 X
 CONCLUSION
 E
 Démonstrations
 Liste des propriétés
 Tables comparatives

ANNEXE A

Démonstrations

(§3.2.1) Proposition 1 ←

F est une fonction de T vers \mathbf{R}_+ possédant les propriétés [P11] à [P14].

❶ Existence de f.

lemme. Soit (θ, I, J) et (ψ, K, L) deux éléments de T tels que $d_I = d_K$ et $D_{IJ}^\theta = D_{KL}^\psi$ et $d_J = d_L$.
 F est définie en (θ, I, J) si et seulement si elle l'est en (ψ, K, L) .
 De plus, si F est définie en (θ, I, J) et (ψ, K, L) : $F(\theta, I, J) = F(\psi, K, L)$.

Supposons F définie en (θ, I, J) .

Il existe un déplacement δ du plan tel que : $\delta(I) = K$ et $\delta(J) = L$.

→ Si δ est une rotation d'angle β : $\psi = \beta + \theta$ $[2\pi]$.

D'après [P24], qui résulte de [P14]^{V3}, F est définie en $(\beta + \theta, \delta(I), \delta(J))$, donc en (ψ, K, L) .

De plus : $F(\psi, K, L) = F(\beta + \theta, \delta(I), \delta(J)) = F(\theta, I, J)$.

→ Si δ n'est pas une rotation, c'est une translation : $\psi = \theta$ $[2\pi]$.

Et toujours d'après [P24], F est définie en $(\theta, \delta(I), \delta(J))$, donc en (ψ, K, L) .

De plus : $F(\psi, K, L) = F(\theta, \delta(I), \delta(J)) = F(\theta, I, J)$.

(θ, I, J) et (ψ, K, L) jouent des rôles symétriques : le lemme est donc bien démontré.

On définit la fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ de la façon suivante.

Soit (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Il existe un élément (θ, I, J) de T , où I et J sont des segments, tel que : $x=d_I$ et $y=D_{IJ}^0$ et $z=d_J$. On convient d'admettre (x,y,z) dans le domaine de définition de f si et seulement si F est définie en (θ, I, J) . Et l'on pose alors : $f(x,y,z)=F(\theta, I, J)$. D'après le lemme, l'appartenance ou non de (x,y,z) au domaine de définition de f , et le cas échéant la valeur de $f(x,y,z)$, ne dépendent pas du choix de (θ, I, J) : la définition que nous venons de donner de f est donc bien consistante.

② Propriétés de f .

→ [P3]

Soit (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ tel que : $x+y+z < 0$ ou $y > 0$. Il existe un réel θ et deux segments I' et J' vérifiant : $(\theta, I', J') \in T$ et $d_{I'}=x$ et $D_{I'J'}^0=y$ et $d_{J'}=z$. I' et J' sont peut-être dégénérés. Mais ils sont disjoints. Il existe par conséquent deux segments I et J non dégénérés tels que : $(\theta, I, J) \in T$ et $I \cap J = \emptyset$ et $I \subset I'$ et $J \subset J'$. D'après [P11], F est définie en (θ, I, J) . D'après [P12], F est définie en (θ, I', J') et : $F(\theta, I', J') \leq F(\theta, I, J)$. D'après [P9], f est donc définie en (x,y,z) et : $f(x,y,z)=F(\theta, I', J') \leq F(\theta, I, J)$.

♦ Si $x+y+z < 0$ alors : $\forall (M,N) \in I \times J, \angle(N,M) \neq \theta [2\pi]$.

D'après [P11] : $F(\theta, I, J)=0$. D'où : $f(x,y,z)=0$.

♦ Si $y > 0$ et $(x,y,z) \in \mathbf{R}_+^3$ alors I' et J' ne sont pas dégénérés et : $\exists (M,N) \in I' \times J' / \angle(N,M) = \theta [2\pi]$.

D'après [P11], F ne s'annule donc pas (θ, I', J') . D'où f ne s'annule pas en (x,y,z) .

→ [P4]

Soit (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ en lequel f est définie. D'après [P9], il existe un élément (θ, I, J) de T en lequel F est définie, avec I et J deux segments vérifiant : $d_I=x$ et $D_{IJ}^0=y$ et $d_J=z$. De plus : $F(\theta, I, J)=f(x,y,z)$. D'après [P13] puis [P9], f est donc définie en $(d_J, D_{JJ}^{\theta+\pi}, d_I)$, c'est-à-dire en (z,y,x) — puisque $D_{JJ}^{\theta+\pi}=D_{II}^0$. Et nous avons : $f(z,y,x)=F(\theta+\pi, J, I)=F(\theta, I, J)=f(x,y,z)$.

(§3.2.1) Proposition 1 ⇒

f est une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant les propriétés [P3] à [P5].

F est la fonction de T vers \mathbf{R}_+ générée par f .

lemme 1. Soit (θ, I, J) un élément de T . Si I et J sont deux segments disjoints alors f est définie en (d_I, D_{IJ}^0, d_J) et F l'est en (θ, I, J) .

Si I et J sont deux segments disjoints (d_I, D_{IJ}^0, d_J) est un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$.

Et nous avons soit $d_I + D_{IJ}^0 + d_J < 0$ soit $D_{IJ}^0 > 0$ (fig.7, §2.2). D'après [P3], f est donc définie en (d_I, D_{IJ}^0, d_J) . Par conséquent, d'après [P9], F l'est en (θ, I, J) .

lemme 2. Soit x et y deux réels positifs, avec y non nul : $f(x,y,0)=f(0,y,x)=0$

D'après [P3] f est définie en $(x,y,0)$ et $(0,y,x)$. Et d'après [P5] :

$f(0+y,x)=f(0,y,x)+f(0,0+y,x)$. D'où $f(0,y,x)=0$.

Par conséquent, d'après [P4] : $f(x,y,0)=f(0,y,x)=0$.

① F possède évidemment [P10] (par définition).

② Démontrons [P11].

Soit θ un réel, I et J deux segments disjoints tels que (θ, I, J) appartienne à T. f est définie en (d_I, D_{II}^0, d_J) et F l'est en (θ, I, J) (lemme 1). D'autre part, nous avons soit $d_I + D_{II}^0 + d_J < 0$ soit $D_{II}^0 > 0$. S'il n'existe aucun élément (M,N) de $I \times J$ tel que M soit dans la direction θ de N c'est que nous sommes dans le premier cas. $f(d_I, D_{II}^0, d_J)$, c'est-à-dire $F(\theta, I, J)$, est donc nul. Réciproquement, si $F(\theta, I, J)$ est nul et si ni I ni J ne sont dégénérés on ne peut être que dans le premier cas : en effet, f ne s'annule en aucun point de \mathbf{R}_+^3 , ensemble auquel (d_I, D_{II}^0, d_J) appartiendrait si l'on était dans le second cas.

③ Démontrons [P12].

Soit (θ, I', J') un élément de T, I et J deux segments disjoints tels que (θ, I, J) appartienne à T. Supposons I' inclus dans I et J' dans J. F est définie en (θ, I, J) (lemme 1). Et d'après [P25] (qui découle de [P10]^{v4}), si I' ou J' sont vides F est définie et nulle en (θ, I', J') . Nous avons donc dans ce cas : $F(\theta, I', J') \leq F(\theta, I, J)$. Il nous reste à montrer que : $\forall p \in \mathbf{N}^*, \mathcal{F}_p$.

Où \mathcal{F}_p désigne la propriété ci-après.

\mathcal{F}_p | Soit I et J deux segments disjoints tels que (θ, I, J) appartienne à T. Soit $\{I_i\}_{i \in 1..n}$ un ensemble de segments deux à deux disjoints inclus dans I, $\{J_j\}_{j \in 1..m}$ un ensemble de segments deux à deux disjoints inclus dans J. Si $1 \leq n \leq p$ et $1 \leq m \leq p$ alors F est définie en $(\theta, \cup_{i \in 1..n} I_i, \cup_{j \in 1..m} J_j)$ et : $F(\theta, \cup_{i \in 1..n} I_i, \cup_{j \in 1..m} J_j) \leq F(\theta, I, J)$.

→ Démontrons tout d'abord \mathcal{F}_1 .

Soit donc I et J deux segments disjoints tels que (θ, I, J) appartienne à T, I' un segment inclus dans I, J' un segment inclus dans J. I' et J' sont eux aussi disjoints. F est définie en (θ, I, J) et (θ, I', J') (lemme 1). Nous avons d'autre part soit $d_{I'} + D_{I'J'}^0 + d_{J'} < 0$ soit $D_{I'J'}^0 > 0$. Dans le premier cas, f est nulle en $(d_{I'}, D_{I'J'}^0, d_{J'})$, d'après [P3]. Cela reste vrai si $D_{I'J'}^0 > 0$ et si I' ou J' sont dégénérés (lemme 2). Dans les deux cas, et d'après [P9], F est nulle en (θ, I', J') . Nous avons donc bien : $F(\theta, I', J') \leq F(\theta, I, J)$. Que se passe-t-il enfin si $(d_{I'}, D_{I'J'}^0, d_{J'})$ est un élément de \mathbf{R}_+^3 ?



figure 48. Les segments I^-, I^+, J^- et J^+ .

Il existe alors deux segments I^- et I^+ tels que (fig.48) :

$$I = I^- \cup I' \cup I^+ \text{ et } D_{I^+I'}^0 = 0 \text{ et } D_{I'I^-}^0 = 0.$$

De même, il existe deux segments J^- et J^+ tels que :

$$J = J^- \cup J' \cup J^+ \text{ et } D_{J^+J'}^0 = 0 \text{ et } D_{J'J^-}^0 = 0.$$

D'après [P5], et en écrivant $d_I = d_{I^-} + d_{I'} + d_{I^+}$:

$$f(d_I, D_{II}^0, d_J) = f(d_{I^-}, D_{II}^0, d_J) + f(d_{I'}, d_{I^-} + D_{II}^0, d_J) + f(d_{I^+}, d_{I'} + d_{I^-} + D_{II}^0, d_J)$$

Somme dont on peut développer le second terme, en écrivant cette fois $d_J = d_{J^-} + d_{J'} + d_{J^+}$.

$f(d_I, D_{II}^0, d_J)$ s'exprime alors comme la somme de 5 termes, l'un d'eux étant $f(d_{I'}, d_{J^+} + D_{II}^0 + d_{I^-}, d_{J'})$, c'est-à-dire $f(d_{I'}, D_{I'J'}^0, d_{J'})$. Or f est à valeurs positives. Par conséquent : $f(d_{I'}, D_{I'J'}^0, d_{J'}) \leq f(d_I, D_{II}^0, d_J)$.

Soit d'après [P9] : $F(\theta, I', J') \leq F(\theta, I, J)$. En conclusion, nous avons bien \mathcal{F}_1 .

→ Admettons maintenant \mathcal{H}_p , pour p entier naturel non nul donné, et démontrons \mathcal{H}_{p+1} .

Soit donc I et J deux segments disjoints tels que (θ, I, J) appartienne à T , $\{I_i\}_{i \in 1..n}$ un ensemble de segments deux à deux disjoints inclus dans I , $\{J_j\}_{j \in 1..m}$ un ensemble de segments deux à deux disjoints inclus dans J , avec n et m tels que $1 \leq n \leq p+1$ et $1 \leq m \leq p+1$. Nous pouvons supposer :

$$(\forall i \in 1..n-1, a_{I_i}^\theta < a_{I_n}^\theta) \text{ et } (\forall j \in 1..m-1, a_{J_j}^\theta < a_{J_m}^\theta)$$

Il existe deux segments I^- et I^+ tels que :

$$\bigcup_{i \in 1..n-1} I_i \subset I^- \text{ et } I_n \subset I^+ \text{ et } I = I^- \cup I^+ \text{ et } D_{I^- I^+}^\theta = 0.$$

De même, il existe deux segments J^- et J^+ tels que :

$$\bigcup_{j \in 1..m-1} J_j \subset J^- \text{ et } J_m \subset J^+ \text{ et } J = J^- \cup J^+ \text{ et } D_{J^- J^+}^\theta = 0.$$

D'après [P10] et le lemme 1, F est définie en $(\theta, \bigcup_{i \in 1..n} I_i, \bigcup_{j \in 1..m} J_j)$. De plus :

$$F(\theta, \bigcup_{i \in 1..n} I_i, \bigcup_{j \in 1..m} J_j) = F(\theta, \bigcup_{i \in 1..n-1} I_i, \bigcup_{j \in 1..m-1} J_j) + F(\theta, \bigcup_{i \in 1..n-1} I_i, J_m) + F(\theta, I_n, \bigcup_{j \in 1..m-1} J_j) + F(\theta, I_n, J_m)$$

$$\text{Et d'après } \mathcal{H}_p : F(\theta, \bigcup_{i \in 1..n} I_i, \bigcup_{j \in 1..m} J_j) \leq F(\theta, I^-, J^-) + F(\theta, I^-, J^+) + F(\theta, I^+, J^-) + F(\theta, I^+, J^+)$$

[P9] permet d'exprimer la somme de droite en fonction de f . En appliquant ensuite [P5], puis en revenant à F au moyen de [P9], il est facile de vérifier que cette somme est tout simplement $F(\theta, I, J)$. \mathcal{H}_{p+1} est donc vraie.

→ Nous venons de démontrer par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}_p$
[P12] est donc satisfaite.

④ Démontrons [P13].

Soit (θ, I, J) un élément de T en lequel F est définie.

→ Si I et J sont des segments, d'après [P9] f est définie en $(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$. Et d'après [P4] elle l'est aussi en $(d_J, D_{JI}^\theta, d_I)$. Or $(d_J, D_{JI}^{\theta+\pi}, d_I)$ est égal à $(d_J, D_{JI}^\theta, d_I)$. f est donc définie en $(d_J, D_{JI}^{\theta+\pi}, d_I)$ et, d'après [P9], F l'est en $(\theta+\pi, J, I)$. De plus, toujours d'après [P9] :

$$F(\theta+\pi, J, I) = f(d_J, D_{JI}^{\theta+\pi}, d_I) = f(d_J, D_{JI}^\theta, d_I) = F(\theta, I, J).$$

→ Lorsque I et J sont quelconques, l'on se ramène évidemment au cas précédent en exploitant [P10].

⑤ Démontrons [P14].

Soit (θ, I, J) un élément de T en lequel F est définie et soit s une réflexion d'axe $\Delta_\beta(v)$.

→ Si I et J sont des segments, d'après [P9], f est définie en $(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$.

Or $(d_{s(I)}, D_{s(I)s(J)}^{2\beta-\theta}, d_{s(J)})$ est égal à $(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$ (fig.49).

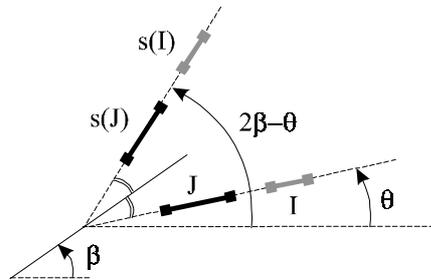


figure 49. Réflexions et sections longitudinales.

f est donc définie en $(d_{s(I)}, D_{s(I)s(J)}^{2\beta-\theta}, d_{s(J)})$, et F l'est en $(2\beta-\theta, s(I), s(J))$.

De plus, toujours d'après [P9] : $F(2\beta-\theta, s(I), s(J)) = f(d_{s(I)}, D_{s(I)s(J)}^{2\beta-\theta}, d_{s(J)}) = f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J) = F(\theta, I, J)$.

→ Lorsque I et J sont quelconques,
l'on se ramène évidemment au cas précédent en exploitant [P10].

(§3.2.2) Proposition 2 ←

f est une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant [P3] à [P5] et de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$.

❶ Nous allons montrer tout d'abord qu'il existe une application ψ de \mathbf{R} vers \mathbf{R} , nulle sur \mathbf{R}_- et continue sur \mathbf{R}_+^* , telle que : $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$, $f_{1,3}''(x,y,z) = \psi(x+y+z)$.
Soit donc (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$ et ε un élément de \mathbf{R}_+^* .

→ D'après [P5] : $f(x+\varepsilon,y,z) = f(x,y,z) + f(\varepsilon,x+y,z)$. Par conséquent :

$$\frac{f(x+\varepsilon,y,z) - f(x,y,z)}{\varepsilon} = \frac{f(\varepsilon,x+y,z)}{\varepsilon} = \frac{f(0+\varepsilon,x+y,z) - f(0,x+y,z)}{\varepsilon}$$

La seconde égalité résulte du fait que $f(0,x+y,z)$ est nul (cf. lemme 2, démonstration de la proposition 1 ⇒). f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$. En faisant tendre ε vers 0 il vient donc : $f_1'(x,y,z) = f_1'(0,x+y,z)$. D'où : $f_{1,3}''(x,y,z) \stackrel{1}{=} f_{1,3}''(0,x+y,z)$.

→ D'après [P4] et [P5] : $f(x,y,z+\varepsilon) = f(z+\varepsilon,y,x) = f(z,y,x) + f(\varepsilon,z+y,x) = f(x,y,z) + f(x,y+z,\varepsilon)$.
Par conséquent :

$$\frac{f(x,y,z+\varepsilon) - f(x,y,z)}{\varepsilon} = \frac{f(x,y+z,\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{f(x,y+z,0+\varepsilon) - f(x,y+z,0)}{\varepsilon}$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient cette fois : $f_3'(x,y,z) = f_3'(x,y+z,0)$.

D'où : $f_{3,1}''(x,y,z) = f_{3,1}''(x,y+z,0)$. Or, f étant de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$: $f_{3,1}'' = f_{1,3}''$.

Enfin : $f_{1,3}''(x,y,z) \stackrel{2}{=} f_{1,3}''(x,y+z,0)$

→ Dans l'égalité 1, substituons le triplet $(x,y+z,0)$ au triplet (x,y,z) .

Nous obtenons : $f_{1,3}''(x,y+z,0) = f_{1,3}''(0,x+(y+z),0)$.

Nous pouvons donc récrire l'égalité 2 de la façon suivante : $f_{1,3}''(x,y,z) = f_{1,3}''(0,x+y+z,0)$.

Notons ψ l'application de \mathbf{R} vers \mathbf{R} , nulle sur \mathbf{R}_- , et qui à tout réel t strictement positif associe : $f_{1,3}''(0,t,0)$. Nous avons : $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$, $f_{1,3}''(x,y,z) \stackrel{3}{=} \psi(x+y+z)$.

Et ψ est continue sur \mathbf{R}_+^* , puisque par hypothèse sur f, $f_{1,3}''$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$.

❷ Nous allons montrer maintenant que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, (x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0) \Rightarrow f(x,y,z) = \int_{y+z}^{x+y+z} \left(\int_0^z \psi(u-v) dv \right) du$$

Notons $\bar{\psi}$ l'une des primitives de ψ sur \mathbf{R}_+^* et $\bar{\bar{\psi}}$ l'une des primitives de $\bar{\psi}$ sur ce même ensemble. L'existence de $\bar{\psi}$ et $\bar{\bar{\psi}}$ est assurée par la continuité de ψ sur \mathbf{R}_+^* .

→ D'après l'égalité 3, et en procédant à une intégration, on peut affirmer qu'il existe une application ζ de \mathbf{R}^2 vers \mathbf{R} telle que : $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$, $f_1'(x,y,z) = \bar{\psi}(x+y+z) + \zeta(x,y)$.
Or : $f_1'(x,y,0) = 0$. En effet, d'après le lemme 2 énoncé dans la démonstration de la proposition 1 ⇒, la fonction partielle $f(\cdot, y, 0)$ est nulle sur \mathbf{R}_+ . Nous avons donc : $\zeta(x,y) = -\bar{\psi}(x+y)$.

Et par conséquent : $f_1'(x,y,z) \stackrel{4}{=} \bar{\psi}(x+y+z) - \bar{\psi}(x+y)$.

→ De manière semblable, on peut affirmer d'après l'égalité 4 qu'il existe une application ξ de \mathbf{R}^2 vers \mathbf{R} telle que : $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$, $f(x,y,z) = \overline{\psi}(x+y+z) - \overline{\psi}(x+y) + \xi(y,z)$.
Or : $f(0,y,z) = 0$. Donc $\xi(y,z) = \overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(y+z)$.

Finalement : $f(x,y,z) \stackrel{5}{=} \overline{\psi}(x+y+z) - \overline{\psi}(x+y) + \overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(y+z)$.

→ L'égalité 5 permet d'écrire : $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$, $f(x,y,z) = \int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \psi(u-v) dv) du$.

$$\begin{aligned} \text{Car : } \int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \psi(u-v) dv) du &= \int_{y+z}^{x+y+z} [-\overline{\psi}(u-v)]_{v=0}^{v=z} du = \int_{y+z}^{x+y+z} [\overline{\psi}(u) - \overline{\psi}(u-z)] du \\ &= [\overline{\psi}(u) - \overline{\psi}(u-z)]_{u=y+z}^{u=x+y+z} = \overline{\psi}(x+y+z) - \overline{\psi}(x+y) + \overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(y+z) \end{aligned}$$

D'autre part, si (x,y,z) est un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ tel que $x+y+z < 0$, $f(x,y,z) = 0$ (d'après [P3]).
Or dans ce cas, l'intégrale double précédente vaut aussi 0. En effet : $\forall u \in [y+z, x+y+z]$, $\forall v \in [0, z]$, $u-v < 0$. Et par construction, ψ est nulle sur \mathbf{R}_- . Nous avons donc bien :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, (x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0) \Rightarrow f(x,y,z) = \int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \psi(u-v) dv) du$$

③ Vérifions enfin que ψ est positive sur \mathbf{R}_+^* et n'est nulle sur aucun intervalle ouvert non vide de cet ensemble. Si ψ n'avait pas l'une ou l'autre de ces propriétés, il existerait un intervalle $[t_1, t_2]$, avec $0 < t_1 < t_2$, tel que : $\forall t \in [t_1, t_2]$, $\psi(t) \leq 0$. Car ψ est continue sur \mathbf{R}_+^* . Posons : $y = t_1$ et $x = z = (t_2 - t_1)/2$. Nous aurions : $\forall u \in [y+z, x+y+z]$, $\forall v \in [0, z]$, $u-v \in [t_1, t_2]$. Et donc :

$$f(x,y,z) = \int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \psi(u-v) dv) du \leq 0$$

Ce qui est contradictoire avec le fait que f est à valeurs positives et ne s'annule pas sur \mathbf{R}_+^* .

En conclusion, il existe bien une fonction φ répondant aux critères exigés :
c'est la fonction de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ qui à tout t associe $\psi(t)$.

(§3.2.2) Proposition 2 ⇒

φ est une fonction de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ possédant la propriété [P1].

f est la fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ générée par φ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$.

① Démontrons [P3].

→ Soit (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ tel que : $x+y+z < 0$.

Pour tout u de $[y+z, x+y+z]$ et tout v de $[0, z]$: $u-v < 0$.

φ étant nulle sur \mathbf{R}_- , l'intégrale $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \varphi(u-v) dv) du$ est bien définie et vaut 0.

→ Soit (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ tel que : $y > 0$.

Pour tout u de $[y+z, x+y+z]$ et tout v de $[0, z]$: $u-v > 0$.

φ étant continue sur \mathbf{R}_+^* , l'intégrale $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \varphi(u-v) dv) du$ est bien définie.

D'autre part, si ni x ni z ne sont nuls les bornes $y+z$ et $x+y+z$ sont distinctes, 0 et z également :
comme il n'existe aucun intervalle ouvert non vide de \mathbf{R}_+^* sur lequel φ soit nulle, et comme φ est une fonction à valeurs positives continue sur \mathbf{R}_+^* , l'intégrale précédente ne vaut pas 0.

② Démontrons [P4].

Soit (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ en lequel f est définie. Nous avons :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_{y+z}^{x+y+z} \left(\int_0^z \varphi(u-v)dv \right) du \stackrel{1}{=} - \int_{y+z}^{x+y+z} \left(\int_{x+y+z}^{x+y} \varphi(u-(x+y+z)+V)dV \right) du \\ &\stackrel{2}{=} \int_x^0 \left(\int_{x+y+z}^{x+y} \varphi(V-U)dV \right) dU = \int_{x+y+z}^{x+y} \left(\int_x^0 \varphi(V-U)dU \right) dV \\ &= \int_{x+y}^{x+y+z} \left(\int_0^x \varphi(V-U)dU \right) dV \end{aligned}$$

f est donc définie en (z,y,x) et : $f(z,y,x)=f(x,y,z)$.

L'égalité 1 s'obtient en posant : $V=(x+y+z)-v$. Et l'égalité 2 : $U=(x+y+z)-u$.

③ [P5] découle directement de la relation de Chasles.

Proposition 3

(§3.2.4) **Proposition 4**

Proposition 5

Les démonstrations des propositions 3, $4 \Leftarrow$, $4 \Rightarrow$ et 5 sont contenues dans celles des propositions $6 \Leftarrow$ et $6 \Rightarrow$.

(§3.2.4) **Proposition 6** \Leftarrow

f est une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant [P3] à [P5] et de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$. φ dénote l'application de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ qui — en vertu de la proposition $2 \Leftarrow$ — possède [P1] et génère f sur au moins $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$.

① Nous supposons ici que f possède [P6]. Soit donc g l'application de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* rattachée à f par cette propriété. Montrons tout d'abord qu'il existe un réel s vérifiant : $\forall k \in \mathbf{R}_+^*, g(k)=k^s$. Soit (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+^*{}^3$. D'après [P3], pour tout réel k strictement positif, f est définie et non nulle en (kx,ky,kz) .

→ [P6] permet donc d'écrire : $\forall k \in \mathbf{R}_+^*, g(k)=f(kx,ky,kz)/f(x,y,z)$. $g(1)=1$. D'autre part, f étant de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*{}^3$, g est dérivable sur \mathbf{R}_+^* .

→ Soit maintenant k_1 et k_2 deux réels strictement positifs. Nous avons d'une part : $f(k_1k_2.x,k_1k_2.y,k_1k_2.z) = g(k_1k_2).f(x,y,z)$. Et d'autre part : $f(k_1k_2.x,k_1k_2.y,k_1k_2.z) = f(k_1(k_2.x),k_1(k_2.y),k_1(k_2.z)) = g(k_1).f(k_2.x,k_2.y,k_2.z) = g(k_1)g(k_2).f(x,y,z)$. Par conséquent : $g(k_1k_2)=g(k_1)g(k_2)$.

→ Considérons enfin la fonction de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* qui à tout t associe $g(kt)$, où k désigne un réel strictement positif. Cette fonction est dérivable. Et comme $g(kt)$ est égal à $g(k)g(t)$, nous avons : $\forall t \in \mathbf{R}_+^*, k.g'(kt)=g(k)g'(t)$. En choisissant $t=1$ et en posant $s=g'(1)$, il vient : $k.g'(k)=s.g(k)$. D'où : $g'(k)/g(k)=s/k$. Il existe donc un réel C indépendant de k tel que : $\ln(g(k))=s.\ln(k)+C$. Et ce réel vaut 0 puisque $g(1)=1$. Finalement : $g(k)=k^s$.

② Nous supposons encore que f possède [P6]. Soit donc $g | k \rightarrow k^s$ l'application de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* rattachée à f par cette propriété. Notons $\overline{\varphi}$ l'une des primitives de φ sur \mathbf{R}_+^* et $\overline{\overline{\varphi}}$ l'une des primitives de $\overline{\varphi}$ sur ce même ensemble. L'existence de $\overline{\varphi}$ et $\overline{\overline{\varphi}}$ est assurée par la continuité de

φ sur \mathbf{R}_+^* . Considérons quatre réels strictement positifs x, y, z et k . En reprenant les calculs effectués pour la démonstration de la proposition 2 \Leftarrow (point ②, égalité 5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(kx, ky, kz) &= \overline{\varphi}(kx+ky+kz) - \overline{\varphi}(kx+ky) + \overline{\varphi}(ky) - \overline{\varphi}(ky+kz) \\ f(kx, ky, kz) &= g(k).f(x, y, z) = k^s.(\overline{\varphi}(x+y+z) - \overline{\varphi}(x+y) + \overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(y+z)) \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à x ces deux expressions de $f(kx, ky, kz)$ il vient :

$$k.[\overline{\varphi}(kx+ky+kz) - \overline{\varphi}(kx+ky)] = k^s.(\overline{\varphi}(x+y+z) - \overline{\varphi}(x+y)).$$

Et en dérivant à nouveau, cette fois par rapport à z : $k^2.\varphi(kx+ky+kz) = k^s.\varphi(x+y+z)$.

Choisissons x, y et z tels que $x+y+z=1$, posons $h=\varphi(1)$ et $r=2-s$. Nous obtenons : $\varphi(k)=h.\varphi_r(k)$.

En définitive, puisque par ailleurs φ et φ_r sont nulles sur \mathbf{R}_- : $\varphi=h.\varphi_r$.

Par conséquent, f coïncide avec $h.f_r$ sur $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$.

③ Nous supposons maintenant que f possède [P7]. Soit $\overline{\varphi}$ l'une des primitives de φ sur \mathbf{R}_+^* et soit $\overline{\overline{\varphi}}$ l'une des primitives de $\overline{\varphi}$ sur ce même ensemble. Considérons quatre réels strictement positifs x, y_1, y_2 et z . En reprenant encore les calculs effectués pour la démonstration de la proposition 2 \Leftarrow (point ②, égalité 5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(x, y_1, z) &= \overline{\overline{\varphi}}(x+y_1+z) - \overline{\overline{\varphi}}(x+y_1) + \overline{\overline{\varphi}}(y_1) - \overline{\overline{\varphi}}(y_1+z) \\ f(x, y_2, z) &= \overline{\overline{\varphi}}(x+y_2+z) - \overline{\overline{\varphi}}(x+y_2) + \overline{\overline{\varphi}}(y_2) - \overline{\overline{\varphi}}(y_2+z) \end{aligned}$$

Or d'après [P7] : $f(x, y_1, z) = f(x, y_2, z)$. En dérivant par rapport à x les expressions précédentes de $f(x, y_1, z)$ et $f(x, y_2, z)$ il vient donc : $\overline{\overline{\varphi}}(x+y_1+z) - \overline{\overline{\varphi}}(x+y_1) = \overline{\overline{\varphi}}(x+y_2+z) - \overline{\overline{\varphi}}(x+y_2)$. Et en dérivant à nouveau, cette fois par rapport à z : $\varphi(x+y_1+z) = \varphi(x+y_2+z)$. φ est donc constante sur \mathbf{R}_+^* , comme φ_0 . En définitive, puisque par ailleurs φ et φ_0 sont nulles sur \mathbf{R}_- , il existe un réel h tel que : $\varphi=h.\varphi_0$. Par conséquent, f coïncide avec $h.f_0$ sur $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$.

④ Supposons enfin que f possède [P8]. Les calculs du point ② tiennent toujours : il suffit de choisir s égal à 0. f coïncide donc avec $h.f_2$ sur $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$ (où h désigne la valeur $\varphi(1)$).

(§3.2.4) Proposition 6 \Rightarrow

r désigne un réel quelconque, h un réel strictement positif.

Soit P l'une des propriétés [P3] à [P8]. Il est clair que si f_r possède P , $h.f_r$ possède P également. D'autre part, si f_r est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$ il en va de même de $h.f_r$. Intéressons-nous par conséquent à la fonction f_r . Bien entendu, φ_r vérifie [P1]. En particulier, elle est continue sur \mathbf{R}_+^* . f_r est donc de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$ et possède, d'après la proposition 2 \Rightarrow , les propriétés [P3] à [P5]. Démontrons maintenant [P6]. Soit (x, y, z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ en lequel f_r est définie et soit k un réel strictement positif. En posant $U=k.u$ et $V=k.v$, il vient :

$$\begin{aligned} f_r(x, y, z) &= \int_{y+z}^{x+y+z} \left(\int_0^z \varphi_r(u-v) dv \right) du = \frac{1}{k^2} \int_{ky+kz}^{kx+ky+kz} \left(\int_0^{kz} \varphi_r((U-V)/k) dV \right) dU \\ &= \frac{1}{k^2} \int_{ky+kz}^{kx+ky+kz} \left(\int_0^{kz} k^r \varphi_r(U-V) dV \right) dU = k^{r-2} \cdot \int_{ky+kz}^{kx+ky+kz} \left(\int_0^{kz} \varphi_r(U-V) dV \right) dU \end{aligned}$$

f_r est donc définie en (kx, ky, kz) et : $f_r(kx, ky, kz) = k^{2-r}.f_r(x, y, z)$. Nous avons bien [P6] : g est l'application de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* qui à tout k associe k^{2-r} . Un corollaire immédiat de ce résultat est que f_2 possède [P8]. Enfin, f_0 vérifie [P7] : nous renvoyons le lecteur au formulaire 1 (page 85, cas de la classe *AFTER*).

 (§3.2.4) **Proposition 7** ←

Soit F une fonction de T vers \mathbf{R}_+ possédant les propriétés [P10] à [P15]. D'après la proposition 1 ←, il existe une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ qui génère F et possède [P3] et [P4]. Quant à [P6], elle découle immédiatement de [P15] et [P9].

 (§3.2.4) **Proposition 7** ⇒

f est une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ possédant les propriétés [P3] à [P6].

Nous nous intéressons à la fonction F de T vers \mathbf{R}_+ générée par f .

[P10] à [P14] découlent de la proposition 1 ⇒. Démontrons [P15].

Soit (θ, I, J) un élément de T en lequel F est définie et soit h une homothétie de rapport strictement positif k . Soit enfin g l'application de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* dont il est question dans [P4].

→ Si I et J sont des segments, d'après [P9] f est définie en (d_I, D_{II}^0, d_J) . Or $(d_{h(I)}, D_{h(I)h(J)}^0, d_{h(J)})$ est égal à $(k.d_I, k.D_{II}^0, k.d_J)$. D'après [P6], f est donc définie en $(d_{h(I)}, D_{h(I)h(J)}^0, d_{h(J)})$. Et d'après [P9], F l'est en $(\theta, h(I), h(J))$. De plus : $F(\theta, h(I), h(J)) = f(d_{h(I)}, D_{h(I)h(J)}^0, d_{h(J)}) = g(k).f(d_I, D_{II}^0, d_J) = g(k).F(\theta, I, J)$.

→ Lorsque I et J sont quelconques, l'on se ramène au cas précédent en exploitant [P10]. Il est facile de vérifier que F est définie en $(\theta, h(I), h(J))$ et : $F(\theta, h(I), h(J)) = g(k).F(\theta, I, J)$. L'application G dont il est question dans [P15] est donc tout simplement g .

 (§3.3.1) **Proposition 8**

Soit A et B deux objets et soit r et θ deux réels.

Le domaine de définition de f_r est indiqué dans le paragraphe §6.2.2. Comme le montrent bien les lignes 2 et 3 de la figure 37, ce domaine \mathcal{D}_r dépend de r . La justification des résultats énoncés est référencée par $\nabla 9$. La démonstration suivante s'appuie largement sur ces résultats, sur le fait que f_r est continue en tout point de \mathcal{D}_r et sur le fait que A et B sont bornés et fermés.

❶ Supposons A et B tels que : $A \cap B = \emptyset$.

F_r est alors définie en tout point de $\{(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in \mathbf{R}}$ et les ensembles $\{F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in \mathbf{R}}$ et $\{v \in \mathbf{R} / F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) \neq 0\}$ sont bornés. Il existe trois réels M , v_1 et v_2 , avec $v_1 < v_2$, tels que :

$$\forall v \in \mathbf{R}, 0 \leq F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) \leq M \quad \text{et} \quad \forall v \in \mathbf{R}, v \notin [v_1, v_2] \Rightarrow F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = 0$$

F_r^{AB} est définie en θ car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$ est définie.

Nous avons : $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv = \int_{v_1}^{v_2} F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv \leq \int_{v_1}^{v_2} M.dv = M(v_2 - v_1)$.

En conclusion, (A, B) est F_r -évaluable.

❷ Supposons A et B tels que : $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$.

→ Si r appartient à $] -\infty, 1[$, F_r est définie en tout point de $\{(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in \mathbf{R}}$, les ensembles $\{F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in \mathbf{R}}$ et $\{v \in \mathbf{R} / F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) \neq 0\}$ sont encore bornés, F_r^{AB} est toujours définie en θ . (A, B) est donc F_r -évaluable.

→ Si r appartient à $[1, +\infty[$, il existe deux valeurs v_1 et v_2 , avec $v_1 < v_2$, telles que : F_r n'est définie en aucun point de $\{(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in [v_1, v_2]}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$ n'est donc pas définie, F_r^{AB} n'est pas définie en θ , (A, B) n'est pas F_r -évaluable.

❸ Supposons A et B tels que : $A \cap B \neq \emptyset$ et $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$.

→ Si r appartient à $]-\infty, 2[$, F_r est définie en tout point de $\{(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in \mathbf{R}}$, les ensembles $\{F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in \mathbf{R}}$ et $\{v \in \mathbf{R} / F_r(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) \neq 0\}$ sont bornés, F_r^{AB} est définie en θ . (A,B) est donc F_r -évaluable.

→ Si r appartient à $[2, +\infty[$, trois cas sont possibles :

- ♦ F_r est définie en tout point de $\{(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in \mathbf{R}}$ et F_r^{AB} est définie en θ (fig.50a).
- ♦ F_r n'est pas définie en tout point de $\{(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in \mathbf{R}}$ mais F_r^{AB} est définie en θ (fig.50b).
- ♦ F_r n'est pas définie en tout point de $\{(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))\}_{v \in \mathbf{R}}$ et F_r^{AB} n'est pas définie en θ (fig.50c).

Autrement dit, (A,B) peut être F_r -évaluable, mais il peut aussi ne pas l'être. Il n'existe pas de critère ensembliste ou topologique permettant de trancher.

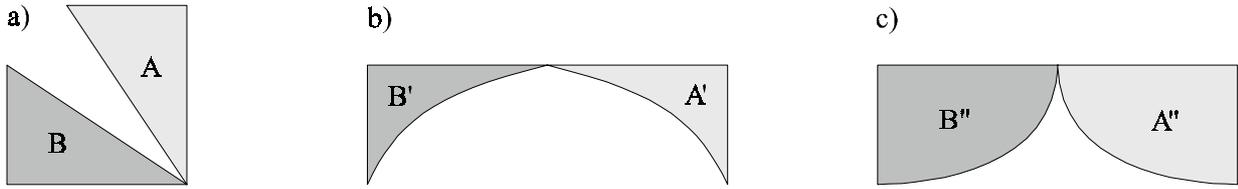


figure 50. Recherche des couples d'objets F_r -évaluables. Cas litigieux.

(§3.3.2) Proposition 9←

F est une fonction de T vers \mathbf{R}_+ ; $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ une famille de relations binaires floues entre objets nets s'informant par le biais des F-histogrammes ; μ la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points. On suppose que F possède [P10] à [P14], que $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ et μ se partagent [A1] et que $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ possède [A2] et [A3]. Les lemmes suivants seront utiles aux démonstrations des deux propositions 9← et 9⇒.

lemme 1. Soit (A,B) un couple F-évaluable d'objets et α un réel.

(B,A) est F-évaluable. De plus : $F^{BA} \oplus (\alpha + \pi) = F^{AB} \oplus \alpha$

Soit θ un réel quelconque. (A,B) étant F-évaluable, F^{AB} est définie en tout point, en particulier en $\theta - \pi$. Or :

$$\begin{aligned} F^{AB}(\theta - \pi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta - \pi, A_{\theta - \pi}(u), B_{\theta - \pi}(u)).du \stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F((\theta - \pi) + \pi, B_{\theta - \pi}(u), A_{\theta - \pi}(u)).du \\ &\stackrel{2}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, B_\theta(-u), A_\theta(-u)).du \stackrel{3}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, B_\theta(U), A_\theta(U)).dU \end{aligned}$$

L'égalité 1 découle de [P13], la 2 du fait que les droites orientées $\Delta_{\theta - \pi}(u)$ et $\Delta_\theta(-u)$ partagent le même support, la 3 s'obtient en posant : $U = -u$.

On reconnaît dans la dernière intégrale l'expression de $F^{BA}(\theta)$.

En conclusion de ces calculs, (B,A) est F-évaluable.

De plus : $\forall \theta \in \mathbf{R}, F^{AB}(\theta - \pi) = F^{BA}(\theta)$.

Et donc : $\forall \theta \in \mathbf{R}, [F^{BA} \oplus (\alpha + \pi)](\theta) = F^{BA}(\theta + (\alpha + \pi)) = F^{AB}((\theta + \alpha + \pi) - \pi) = F^{AB}(\theta + \alpha) = F^{AB} \oplus \alpha(\theta)$

lemme 2. Soit (A,B) un couple F-évaluable d'objets, α et β deux réels, sym une symétrie orthogonale d'axe $\Delta_\beta(v)$. $(\text{sym}(A),\text{sym}(B))$ est F-évaluable. De plus : $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $[F^{\text{sym}(A)\text{sym}(B)} \oplus (2\beta-\alpha)](\theta) = [F^{\text{AB}} \oplus \alpha](\theta)$

→ Montrons tout d'abord que pour tout réel θ , il existe un réel k tel que :
 $\forall u \in \mathbf{R}$, $[\text{sym}(A_{2\beta-\theta}(u)) = (\text{sym}(A))_\theta(k-u)$ et $\text{sym}(B_{2\beta-\theta}(u)) = (\text{sym}(B))_\theta(k-u)]$

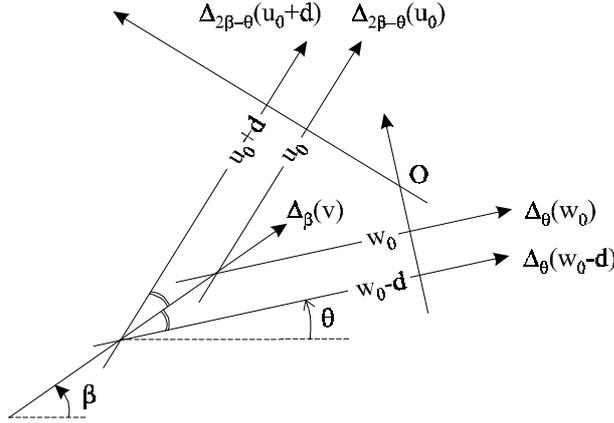


figure 51. Réflexions et droites orientées.

Soit θ et u_0 deux réels. Il existe un réel w_0 tel que (fig.51) : $\text{sym}(\Delta_{2\beta-\theta}(u_0)) = \Delta_\theta(w_0)$.

Et nous avons pour tout réel d : $\text{sym}(\Delta_{2\beta-\theta}(u_0+d)) = \Delta_\theta(w_0-d)$.

En posant $k = u_0 + w_0$ et $u = u_0 + d$. Il vient : $\text{sym}(\Delta_{2\beta-\theta}(u)) = \Delta_\theta(k-u)$.

Nous avons par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{sym}(A_{2\beta-\theta}(u)) &= \text{sym}(A \cap \Delta_{2\beta-\theta}(u)) = \text{sym}(A) \cap \text{sym}(\Delta_{2\beta-\theta}(u)) \\ &= \text{sym}(A) \cap \Delta_\theta(k-u) = (\text{sym}(A))_\theta(k-u) \end{aligned}$$

$$\text{De même : } \text{sym}(B_{2\beta-\theta}(u)) = (\text{sym}(B))_\theta(k-u)$$

→ Soit θ un réel quelconque, k le réel qui lui est associé et dont il est question. (A,B) étant F-évaluable, F^{AB} est définie en tout point, en particulier en $2\beta-\theta$. Or :

$$\begin{aligned} F^{\text{AB}}(2\beta-\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(2\beta-\theta, A_{2\beta-\theta}(u), B_{2\beta-\theta}(u)).du \\ &\stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(2\beta-(2\beta-\theta), \text{sym}(A_{2\beta-\theta}(u)), \text{sym}(B_{2\beta-\theta}(u))).du \\ &\stackrel{2}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, (\text{sym}(A))_\theta(k-u), (\text{sym}(B))_\theta(k-u)).du \\ &\stackrel{3}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, (\text{sym}(A))_\theta(U), (\text{sym}(B))_\theta(U)).dU \end{aligned}$$

L'égalité 1 découle de [P14], la 2 de la définition de k , la 3 s'obtient en posant : $U = k-u$.

On reconnaît dans la dernière intégrale l'expression de $F^{\text{sym}(A)\text{sym}(B)}(\theta)$.

En conclusion de ces calculs, $(\text{sym}(A), \text{sym}(B))$ est F-évaluable.

De plus : $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $F^{\text{AB}}(2\beta-\theta) = F^{\text{sym}(A)\text{sym}(B)}(\theta)$

$$\begin{aligned} \text{Et donc : } \forall \theta \in \mathbf{R}, [F^{\text{sym}(A)\text{sym}(B)} \oplus (2\beta-\alpha)](\theta) &= F^{\text{sym}(A)\text{sym}(B)}(\theta + (2\beta-\alpha)) \\ &= F^{\text{AB}}(2\beta - (\theta + 2\beta - \alpha)) = F^{\text{AB}}(\alpha - \theta) \\ &= [F^{\text{AB}} \oplus \alpha](\theta) \end{aligned}$$

lemme 3. Soit (A,B) un couple F-évaluable d'objets, α un réel, r une rotation d'angle $-\alpha$. $(r(A),r(B))$ est F-évaluable. De plus : $F^{r(A)r(B)} = F^{AB} \oplus \alpha$

Il existe deux réflexions s_1 et s_2 d'axes respectifs $\Delta_\gamma(v_1)$ et $\Delta_{\gamma-\alpha/2}(v_2)$ telles que : $r = s_2 \circ s_1$. D'après le lemme 2, $(s_2(s_1(A)),s_2(s_1(B)))$ — c'est-à-dire $(r(A),r(B))$ — est F-évaluable.

$$\begin{aligned} \text{De plus, pour tout réel } \theta : F^{r(A)r(B)}(\theta) &= [F^{r(A)r(B)} \oplus 0](\theta) \\ &= [F^{s_2(r(A))s_2(r(B))} \oplus (2(\gamma-\alpha/2)-0)](-\theta) \\ &= [F^{s_1(A)s_1(B)} \oplus (2\gamma-\alpha)](-\theta) \\ &= [F^{AB} \oplus \alpha](\theta) \end{aligned}$$

lemme 4. Soit (A,B) un couple F-évaluable d'objets, α un réel, hom une homothétie de rapport strictement positif k . Supposons que F possède [P15]. Soit G l'application de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* rattachée à F par cette propriété. $(\text{hom}(A),\text{hom}(B))$ est F-évaluable. De plus : $F^{\text{hom}(A)\text{hom}(B)} \oplus \alpha = k.G(k).(F^{AB} \oplus \alpha)$

→ Pour tout réel θ , il existe un réel h tel que :

$$\forall u \in \mathbf{R}, [\text{hom}(A_\theta(u)) = (\text{hom}(A))_\theta(ku+h) \text{ et } \text{hom}(B_\theta(u)) = (\text{hom}(B))_\theta(ku+h)]$$

Nous avons rencontré une propriété semblable lors de la démonstration du lemme 2. Nous ne justifions pas celle-ci.

→ Soit θ un réel quelconque, h le réel qui lui est associé par la propriété précédente. (A,B) étant F-évaluable, F^{AB} est définie en θ . Or :

$$\begin{aligned} k.G(k).F^{AB}(\theta) &= k.G(k). \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, A_\theta(u), B_\theta(u)).du \\ &= k. \int_{-\infty}^{+\infty} G(k).F(\theta, A_\theta(u), B_\theta(u)).du \\ &\stackrel{1}{=} k. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, \text{hom}(A_\theta(u)), \text{hom}(B_\theta(u))).du \\ &\stackrel{2}{=} k. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, (\text{hom}(A))_\theta(ku+h), (\text{hom}(B))_\theta(ku+h)).du \\ &\stackrel{3}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, (\text{hom}(A))_\theta(U), (\text{hom}(B))_\theta(U)).dU \end{aligned}$$

L'égalité 1 découle de [P15], la 2 de la définition de h , la 3 s'obtient en posant : $U=ku+h$.

On reconnaît dans la dernière intégrale l'expression de $F^{\text{hom}(A)\text{hom}(B)}(\theta)$.

En conclusion de ces calculs, $(\text{hom}(A),\text{hom}(B))$ est F-évaluable.

De plus : $\forall \theta \in \mathbf{R}, k.G(k).F^{AB}(\theta) = F^{\text{hom}(A)\text{hom}(B)}(\theta)$

$$\begin{aligned} \text{Et donc : } \forall \theta \in \mathbf{R}, [F^{\text{hom}(A)\text{hom}(B)} \oplus \alpha](\theta) &= F^{\text{hom}(A)\text{hom}(B)}(\theta + \alpha) \\ &= k.G(k).F^{AB}(\theta + \alpha) \\ &= k.G(k).[F^{AB} \oplus \alpha](\theta) \end{aligned}$$

Nous pouvons attaquer maintenant le vif du sujet. Soit H l'application de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$ définie de la façon suivante : pour tout élément h de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$, s'il existe un couple (A,B) F-évaluable d'objets nets tel que $h=F^{AB}$ alors $H(h)=\mathcal{R}_0(A,B)$, sinon $H(h)=0$. Cette définition est consistante. En effet, considérons deux couples (A,B) et (C,D) F-évaluables d'objets vérifiant $h=F^{AB}$ et $h=F^{CD}$. D'après [P19], (A,B) et (C,D) sont évaluables — relativement à $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ — et $\mathcal{R}_0(A,B)=\mathcal{R}_0(C,D)$.

❶ Démontrons que F et H génèrent $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$.

D'après [P19], un couple d'objets nets est évaluable — relativement à $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ — si et seulement si il est F-évaluable. Soit donc (A,B) un couple F-évaluable d'objets nets, α un réel. Il nous reste à prouver que : $\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H(F^{AB} \oplus \alpha)$. Par construction de H, nous avons déjà : $H(F^{AB}) = \mathcal{R}_0(A,B)$. Considérons une rotation r d'angle $-\alpha$. D'après [P27] (qui découle de [A3]^{V2}), $(r(A), r(B))$ est évaluable — donc F-évaluable — et $\mathcal{R}_{-\alpha+\alpha}(r(A), r(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A,B)$. Soit : $\mathcal{R}_0(r(A), r(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A,B)$. Soit encore : $\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H(F^{r(A)r(B)})$. Finalement, d'après le lemme 3 : $\mathcal{R}_\alpha(A,B) = H(F^{AB} \oplus \alpha)$.

❷ Démontrons que H possède [P17].

Soit h_1 et h_2 deux éléments de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ liés par : $\forall \theta \in \mathbf{R}, h_1(-\theta) = h_2(\theta)$.

➔ Supposons qu'il existe un couple (A,B) F-évaluable d'objets nets tel que : $h_1 = F^{AB}$.

Soit sym la symétrie orthogonale d'axe $\Delta_0(v)$. D'après le lemme 2, $(\text{sym}(A), \text{sym}(B))$ est F-évaluable et : $\forall \theta \in \mathbf{R}, F^{\text{sym}(A)\text{sym}(B)}(\theta) = F^{AB}(-\theta) = h_1(-\theta)$.

Nous avons par conséquent : $h_2 = F^{\text{sym}(A)\text{sym}(B)}$. Or d'après [A3] :

$\mathcal{R}_0(\text{sym}(A), \text{sym}(B)) = \mathcal{R}_0(A,B)$. Autrement dit : $H(h_2) = H(h_1)$.

➔ D'après ce qui précède, s'il n'existe aucun couple (A,B) F-évaluable d'objets nets tel que $h_1 = F^{AB}$, alors il n'existe pas davantage de couple (A,B) F-évaluable d'objets nets tel que $h_2 = F^{AB}$. Par construction de H nous avons donc : $H(h_1) = H(h_2) = 0$.

❸ Supposons maintenant que F possède [P15] et $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ [A4]. H vérifie-t-elle [P18] ?

D'après la proposition 7 \Leftarrow , il existe une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ qui génère F et possède [P3], [P4] et [P6]. Sous une condition supplémentaire de continuité (§3.2.1), f satisfait également à [P5]. Soyons encore plus exigeant : supposons f de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$. Nous pouvons ainsi profiter de la proposition 6 \Leftarrow . Soit G l'application de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* rattachée à F par la propriété [P15]. Les hypothèses de travail sont telles, qu'il existe un réel r vérifiant : $\forall k \in \mathbf{R}_+^*, G(k) = k^{2-r}$. Cela transparait clairement à travers les démonstrations des propositions 6 \Leftarrow , 6 \Rightarrow et 7 \Rightarrow .

Reposons la question : H possède-t-elle [P18] ?

Soit K un réel strictement positif et h_1 et h_2 deux éléments de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ liés par : $h_1 = K.h_2$.

➔ Supposons qu'il existe un couple (A,B) F-évaluable d'objets nets tel que : $h_2 = F^{AB}$. Soit k un réel strictement positif et soit hom une homothétie de rapport k. D'après le lemme 4, $(\text{hom}(A), \text{hom}(B))$ est F-évaluable et : $F^{\text{hom}(A)\text{hom}(B)} = k.G(k).F^{AB} = k^{3-r}.F^{AB}$. Si r est différent de 3, nous pouvons choisir k tel que : $k^{3-r} = K$. Nous avons alors : $h_1 = F^{\text{hom}(A)\text{hom}(B)}$.

Or d'après [A4] : $\mathcal{R}_0(\text{hom}(A), \text{hom}(B)) = \mathcal{R}_0(A,B)$. Autrement dit : $H(h_1) = H(h_2)$.

➔ D'après ce qui précède, si r est différent de 3 et s'il n'existe aucun couple (A,B) F-évaluable d'objets nets tel que $h_2 = F^{AB}$, alors il n'existe pas davantage de couple (A,B) F-évaluable d'objets nets tel que $h_1 = F^{AB}$. Par construction de H nous avons donc : $H(h_1) = H(h_2) = 0$.

En conclusion, si r est différent de 3, H vérifie [P18].

Dans le cas contraire, H n'a bien sûr aucune raison de posséder cette propriété.

(§3.3.2) **Proposition 9** \Rightarrow

F est une fonction de T vers \mathbf{R}_+ ; H une application de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$; μ la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou susceptible de représenter une famille de relations directionnelles entre points ; $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ la famille de relations binaires floues entre objets nets générée par F et H. On suppose que F possède [P10] à [P14]. D'après la proposition 1 \Leftarrow il existe une fonction f qui génère F : on suppose f continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$. On suppose enfin que H et μ se partagent [P16] et que H possède [P17].

❶ Démontrons [A1].

Soit A et B deux objets nets, α et β deux réels.

A et B étant bornés (définition 2, §3.1.2) il existe deux disques fermés D_A et D_B tels que : ACD_A et BCD_B . On peut supposer que ces disques ont même diamètre. Notons Ω_A le centre de D_A , Ω_B le centre de D_B , \mathcal{D}' la droite passant par Ω_A et admettant \vec{i}_β comme vecteur directeur, Ω' le projeté orthogonal de Ω_B sur \mathcal{D}' , \mathcal{D} la droite parallèle à \mathcal{D}' et passant par le milieu de $[\Omega_B \Omega']$ (fig.52). Il existe un point Ω de \mathcal{D} tel que : $\forall N \in D_B, \exists \theta \in]\beta - \pi/4, \beta + \pi/4[/ \angle(\vec{i}, \overrightarrow{N\Omega}) \equiv \theta [2\pi]$. Depuis Ω , D_B est vu sous un angle strictement inférieur à $\pi/2$. Le symétrique de Ω_B par rapport à Ω est un point de \mathcal{D}' . Soit k_0 la distance entre ce point et Ω_A .

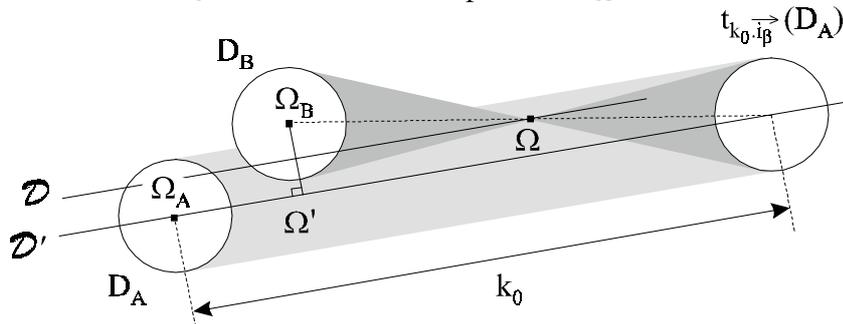


figure 52. Choix de k_0 .

\rightarrow Démontrons tout d'abord que pour toute valeur de k supérieure à k_0 le couple $(t_{k, \vec{i}_\beta}(A), B)$ est F-évaluable. Soit donc k un réel supérieur ou égal à k_0 et soit θ un réel. Nous nous intéressons à : $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, (t_{k, \vec{i}_\beta}(A))_\theta(v), B_\theta(v)) \cdot dv$. Nous allons montrer dans un premier temps que cette intégrale est définie, dans un second temps qu'il existe au moins une valeur de θ pour laquelle cette intégrale n'est pas nulle.

♦ Donnons-nous un réel v. Notons respectivement I' et J' les sections longitudinales $(t_{k, \vec{i}_\beta}(A))_\theta(v)$ et $B_\theta(v)$. Si I' ou J' sont vides alors F est définie et nulle en (θ, I', J') (d'après [P25], qui découle de [P10] ∇^4). Supposons que ce ne soit pas le cas. Considérons les droites distinctes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , tangentes à $t_{k, \vec{i}_\beta}(D_A)$ et admettant $\vec{i}_{\theta + \pi/2}$ comme vecteur directeur. Considérons de la même manière les droites \mathcal{D}_3 et \mathcal{D}_4 , tangentes cette fois à D_B . Notons I le segment incluant I' dont les extrémités appartiennent l'une à \mathcal{D}_1 l'autre à \mathcal{D}_2 , J le segment incluant J' dont les extrémités appartiennent l'une à \mathcal{D}_3 l'autre à \mathcal{D}_4 (fig.53). k_0 et k étant ce qu'ils sont, I et J sont disjoints. D'après [P12], F est donc définie en (θ, I', J') et : $F(\theta, I', J') \leq F(\theta, I, J)$. Or $F(\theta, I, J)$, c'est-à-dire $f(d_I, D_{II}^0, d_J)$, est une valeur indépendante du choix de v.

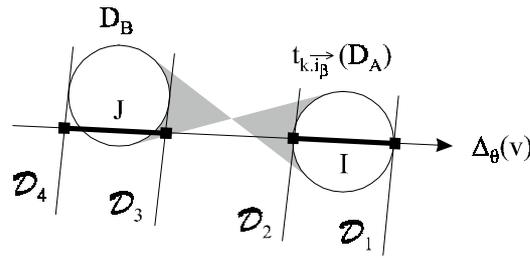


figure 53. Les segments I et J.

En conclusion, que pouvons-nous dire de la fonction ψ de \mathbf{R} vers \mathbf{R} qui à tout v associe $F(\theta, (t_{k.i\beta}(A))_{\theta}(v), B_{\theta}(v))$? Il existe bien entendu un couple (v_1, v_2) de réels, avec v_1 inférieur à v_2 , tel que : $\forall v \in \mathbf{R}, (v < v_1 \text{ ou } v > v_2) \Rightarrow [(t_{k.i\beta}(D_A))_{\theta}(v) = \emptyset \text{ et } (D_B)_{\theta}(v) = \emptyset]$. D'après les résultats précédents, ψ est une application, nulle sur $\mathbf{R} - [v_1, v_2]$ et bornée sur $[v_1, v_2]$. Compte tenu d'une part de [P10] et de la continuité de f , compte tenu d'autre part de la définition d'un objet net, ψ semble donc intégrable sur \mathbf{R} . Ce serait une certitude si ψ ne pouvait admettre sur \mathbf{R} qu'un nombre fini de points de discontinuité. C'est bien sûr toujours le cas en pratique, même si ce ne l'est pas forcément en théorie (fig.54). C'est pourquoi, sans pouvoir en apporter ici la preuve formelle (et quitte à réduire la définition d'un objet net), nous admettons l'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, (t_{k.i\beta}(A))_{\theta}(v), B_{\theta}(v)).dv$.

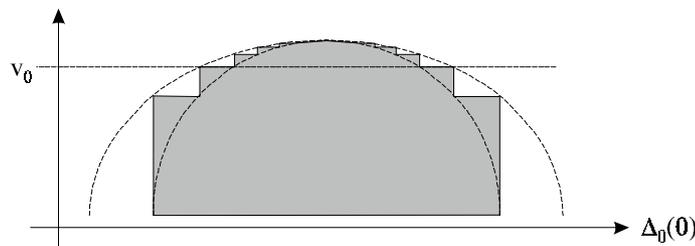


figure 54. Points de discontinuité de ψ .

L'objet représenté est bien un objet net selon la définition 2. Mais dans la direction $\theta=0$ il autorise l'existence, pour une fonction ψ , d'une infinité de points de discontinuité (tels que v_0).

♦ De par la définition d'un objet net, il existe un disque ouvert non vide inclus dans $t_{k.i\beta}(A)$ et un disque ouvert non vide inclus dans B . Désignons respectivement par M et N les centres de ces disques et choisissons θ égal à $\angle(N, M)$. Il existe un couple (v_1, v_2) de réels, avec v_1 strictement inférieur à v_2 , tel que pour tout élément v de $[v_1, v_2]$ $\Delta_{\theta}(v)$ coupe simultanément les disques précédents (fig.55). Et d'après [P10] et [P11], F est définie et ne s'annule pas en $(\theta, (t_{k.i\beta}(A))_{\theta}(v), B_{\theta}(v))$. Conformément aux résultats déjà établis on peut donc affirmer que l'application $v \mapsto F(\theta, (t_{k.i\beta}(A))_{\theta}(v), B_{\theta}(v))$ est intégrable sur $[v_1, v_2]$ et que l'intégrale en question n'est pas nulle. *A fortiori* : $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, (t_{k.i\beta}(A))_{\theta}(v), B_{\theta}(v)).dv \neq 0$.

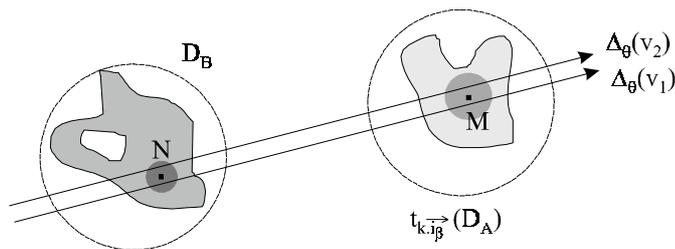


figure 55. Il existe une valeur θ pour laquelle : $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, (t_{k.i\beta}(A))_{\theta}(v), B_{\theta}(v)).dv \neq 0$.

→ Démontrons enfin que : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_\alpha(t_{k, \bar{i}_\beta}(A), B) = \mu(\beta - \alpha)$.

Soit η un réel strictement positif. D'après [P16], il existe un élément ε de $]0, \pi[$ tel que :

$$\forall h \in \text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+), (h \neq 0 \text{ et } h|_{[(\beta-\alpha)-\pi, (\beta-\alpha)-\varepsilon]} \cup [(\beta-\alpha)+\varepsilon, (\beta-\alpha)+\pi]} = 0) \Rightarrow |H(h) - \mu(\beta - \alpha)| < \eta$$

Revenons alors sur le choix du point Ω introduit plus haut (fig.52). Nous pouvons exiger de Ω

que : $\forall N \in \mathbb{D}_B, \exists \theta \in]\beta - \min(\varepsilon, \pi/4), \beta + \min(\varepsilon, \pi/4)[/ \angle(N, \Omega) \equiv \theta [2\pi]$. Les résultats déjà établis

dans la première moitié de cette partie ❶ restent bien sûr valides. Nous pouvons donc affirmer que pour toute valeur de k supérieure à k_0 , $F^{t_{k, \bar{i}_\beta}(A) B}$ est une application non identiquement

nulle (autrement dit, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, (t_{k, \bar{i}_\beta}(A))_\theta(v), B_\theta(v)) \cdot dv$ est définie pour tout réel θ et non nulle pour au moins une valeur de θ). Mais la contrainte supplémentaire imposée à Ω nous

permet d'ajouter que $F^{t_{k, \bar{i}_\beta}(A) B}$ est nulle sur $[\beta - \pi, \beta - \varepsilon] \cup [\beta + \varepsilon, \beta + \pi]$. C'est une conséquence immédiate de [P10] et [P11]. $F^{t_{k, \bar{i}_\beta}(A) B} \oplus \alpha$ est donc nulle sur $[(\beta - \alpha) - \pi, (\beta - \alpha) - \varepsilon] \cup [(\beta - \alpha) + \varepsilon, (\beta - \alpha) + \pi]$,

sans toutefois être identiquement nulle. Par conséquent : $|H(F^{t_{k, \bar{i}_\beta}(A) B} \oplus \alpha) - \mu(\beta - \alpha)| < \eta$. Nous venons de montrer que : $\forall \eta \in \mathbf{R}_+^*, \exists k_0 \in \mathbf{R} / \forall k \in \mathbf{R}, (k \geq k_0 \Rightarrow |H(F^{t_{k, \bar{i}_\beta}(A) B} \oplus \alpha) - \mu(\beta - \alpha)| < \eta)$.

Autrement dit : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_\alpha(t_{k, \bar{i}_\beta}(A), B) = \mu(\beta - \alpha)$.

❷ Démontrons [A2].

Soit (A, B) un couple F-évaluable d'objets, α un réel.

Le lemme 1 de la proposition 9 \Leftarrow tient toujours.

(B, A) est donc F-évaluable et : $F^{BA} \oplus (\alpha + \pi) = F^{AB} \oplus \alpha$.

Par conséquent : $H(F^{BA} \oplus (\alpha + \pi)) = H(F^{AB} \oplus \alpha)$.

Autrement dit : $\mathcal{R}_{\alpha + \pi}(B, A) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$.

❸ Démontrons [A3].

Soit (A, B) un couple F-évaluable d'objets, α un réel, sym une symétrie orthogonale d'axe $\Delta_\beta(v)$.

Le lemme 2 de la proposition 9 \Leftarrow tient toujours. $(\text{sym}(A), \text{sym}(B))$ est donc F-évaluable et pour

tout réel θ : $[F^{\text{sym}(A)\text{sym}(B)} \oplus (2\beta - \alpha)](\theta) = F^{AB} \oplus \alpha(-\theta)$. D'après [P17] nous avons donc :

$H(F^{\text{sym}(A)\text{sym}(B)} \oplus (2\beta - \alpha)) = H(F^{AB} \oplus \alpha)$. Autrement dit : $\mathcal{R}_{2\beta - \alpha}(\text{sym}(A), \text{sym}(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$.

❹ Supposons maintenant que F possède aussi [P15] et H [P18]. Démontrons [A4].

Soit (A, B) un couple F-évaluable d'objets, α un réel, hom une homothétie du plan de rapport strictement positif k . Soit enfin G l'application de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* dont il est question dans [P15].

Le lemme 4 de la proposition 9 \Leftarrow tient toujours. $(\text{hom}(A), \text{hom}(B))$ est donc F-évaluable et :

$F^{\text{hom}(A)\text{hom}(B)} \oplus \alpha = k \cdot G(k) \cdot (F^{AB} \oplus \alpha)$. Mais d'après [P18] : $H(F^{\text{hom}(A)\text{hom}(B)} \oplus \alpha) = H(F^{AB} \oplus \alpha)$.

Autrement dit : $\mathcal{R}_\alpha(\text{hom}(A), \text{hom}(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$.

(§6.1.2) Proposition 10

Pour tout sous-ensemble flou E du plan et tout réel u , nous noterons $\mu_E(u)$ le degré d'appartenance à E du point de $\Delta_\theta(v)$ dont l'abscisse est u — relativement au repère associé à $\Delta_\theta(v)$. Pour

tout i de $1..n$ et tout j de $1..n$, nous noterons d'autre part I^i l'ensemble $(A_\theta(v))^{\alpha_i}$ et J^j l'ensemble $(B_\theta(v))^{\alpha_j}$. Nous avons bien entendu : $I^i = (A_\theta(v))^{\alpha_i} = (A \cap \Delta_\theta(v))^{\alpha_i} = A^{\alpha_i} \cap \Delta_\theta(v) = (A^{\alpha_i})_{\theta(v)}$. De

même : $J^j = (B_\theta(v))^{\alpha_j} = (B^{\alpha_j})_{\theta(v)}$. Par définition d'un objet flou, A^{α_i} est soit un objet net, soit l'ensemble vide. I^i est donc l'union d'un nombre fini de segments disjoints. J^j également. Les

supports de A et B étant supposés disjoints : $I^i \cap J^j = \emptyset$.

❶ Considérons deux points matériels P et Q du plan, l'un de masse p, l'autre de masse q. Notons I le singleton {P}, J le singleton {Q}, d la distance PQ. Supposons I et J distincts et inclus dans $\Delta_\theta(v)$. Si $\angle(Q,P) \equiv \theta [2\pi]$ alors d'après la loi de la gravitation universelle (et en choisissant un système d'unités dans lequel la constante de la gravitation vaut 1) :

$$\mathcal{F}(\theta, I, J) = \frac{p \cdot q}{d^2}$$

Sinon, comme la force exercée par I sur J tend à déplacer J dans la direction $-\theta$: $\mathcal{F}(\theta, I, J) = 0$. Dans les deux cas : $\mathcal{F}(\theta, I, J) = p \cdot q \cdot \varphi_2(D_{IJ}^\theta)$. Si p et q valent 1, il vient : $\mathcal{F}(\theta, I, J) = \varphi_2(D_{IJ}^\theta)$.

❷ Considérons maintenant deux segments disjoints I et J inclus dans $\Delta_\theta(v)$. I est assimilé à une tige homogène de masse spécifique linéaire 1, J également. À la lumière du point ❶, et d'après le principe d'additivité des forces :

$$\mathcal{F}(\theta, I, J) = \int_{a_I}^{b_I} \left[\int_{a_J}^{b_J} \varphi_2(u-w) \cdot dw \right] \cdot du = f_2(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J) = F_2(\theta, I, J)$$

Ce que nous pouvons récrire : $\mathcal{F}(\theta, I, J) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_I(u) \cdot \mu_J(w) \cdot \varphi_2(u-w) \cdot dw \right] \cdot du = F_2(\theta, I, J)$

❸ Le résultat précédent se généralise aisément :

$$\forall i \in 1..n, \forall j \in 1..n, \mathcal{F}(\theta, I^i, J^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{I^i}(u) \cdot \mu_{J^j}(w) \cdot \varphi_2(u-w) \cdot dw \right] \cdot du = F_2(\theta, I^i, J^j)$$

Soit : $\forall i \in 1..n, \forall j \in 1..n, \mathcal{F}(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_j}) = F_2(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_j})$

D'autre part, il est facile de vérifier que :

$$\forall u \in \mathbf{R}, \mu_{A_\theta(v)}(u) = \sum_{i \in 1..n} m_i \cdot \mu_{I^i}(u)$$

$$\forall w \in \mathbf{R}, \mu_{B_\theta(v)}(w) = \sum_{j \in 1..n} m_j \cdot \mu_{J^j}(w)$$

Il s'agit d'ailleurs de résultats bien connus. Il vient finalement :

$$\mathcal{F}(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{A_\theta(v)}(u) \cdot \mu_{B_\theta(v)}(w) \cdot \varphi_2(u-w) \cdot dw \right] \cdot du$$

$$\mathcal{F}(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i \in 1..n} m_i \cdot \mu_{I^i}(u) \right) \cdot \left(\sum_{j \in 1..n} m_j \cdot \mu_{J^j}(w) \right) \cdot \varphi_2(u-w) \cdot dw \right] \cdot du$$

$$\mathcal{F}(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..n} m_i \cdot m_j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{I^i}(u) \cdot \mu_{J^j}(w) \cdot \varphi_2(u-w) \cdot dw \right] \cdot du$$

$$\mathcal{F}(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..n} m_i \cdot m_j \cdot \mathcal{F}(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_j})$$

(page 65, §2.2) **∇1**

La seconde égalité découle d'une propriété classique des intégrales. Démontrons la troisième. Soit (a_1, b_1, a_2, b_2) un quadruplet de réels tels que : $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$. Posons $d_1 = b_1 - a_1$ et $D = a_1 - b_2$ et $d_2 = b_2 - a_2$. Supposons $\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \varphi(u-w) dw \right) du$ définie. En exprimant a_1, b_1 et b_2 en fonction de d_1, D, d_2 et a_2 , puis en posant $W = w - a_2$ et $U = u - a_2$, nous obtenons :

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \varphi(u-w) dw \right) du = \int_{D+d_2+a_2}^{d_1+D+d_2+a_2} \left(\int_{a_2}^{d_2+a_2} \varphi(u-w) dw \right) du$$

$$= \int_{D+d_2+a_2}^{d_1+D+d_2+a_2} \left(\int_0^{d_2} \varphi(u-a_2-W) dW \right) du$$

$$= \int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} \left(\int_0^{d_2} \varphi(U-W) dW \right) dU$$

(page 71, §3.1.2) **∇2**

Soit (A,B) un couple évaluable d'objets nets, α un réel.

→ Soit t une translation. Il existe deux réflexions s_1 et s_2 d'axes respectifs $\Delta_\gamma(v_1)$ et $\Delta_\gamma(v_2)$ telles que : $t = s_2 \circ s_1$. D'après [A3], $(s_1(A), s_1(B))$ est évaluable, et donc $(s_2(s_1(A)), s_2(s_1(B)))$ — c'est-à-dire $(t(A), t(B))$ — également. De plus :

$$\mathcal{R}_\alpha(t(A), t(B)) = \mathcal{R}_{2\gamma - (2\gamma - \alpha)}(s_2(s_1(A)), s_2(s_1(B))) = \mathcal{R}_{2\gamma - \alpha}(s_1(A), s_1(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$$

→ Soit r une rotation d'angle β . Il existe deux réflexions s_1 et s_2 d'axes respectifs $\Delta_\gamma(v_1)$ et $\Delta_{\gamma+\beta/2}(v_2)$ telles que : $r = s_2 \circ s_1$. D'après [A3], $(s_1(A), s_1(B))$ est évaluable, et donc $(s_2(s_1(A)), s_2(s_1(B)))$ — c'est-à-dire $(r(A), r(B))$ — également. De plus :

$$\mathcal{R}_{\beta+\alpha}(r(A), r(B)) = \mathcal{R}_{2(\gamma+\beta/2) - (2\gamma - \alpha)}(s_2(s_1(A)), s_2(s_1(B))) = \mathcal{R}_{2\gamma - \alpha}(s_1(A), s_1(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$$

(page 72, §3.1.3) **∇3**

❶ Démontrons : [P14] \Rightarrow [P24]

Soit (θ, I, J) un élément de T en lequel F est définie.

→ Soit t une translation. Il existe deux réflexions s_1 et s_2 d'axes respectifs $\Delta_\gamma(v_1)$ et $\Delta_\gamma(v_2)$ telles que : $t = s_2 \circ s_1$. D'après [P14], F est définie en $(2\gamma - \theta, s_1(I), s_1(J))$, et donc en $(2\gamma - (2\gamma - \theta), s_2(s_1(I)), s_2(s_1(J)))$, c'est-à-dire en $(\theta, t(I), t(J))$. De plus :

$$F(\theta, t(I), t(J)) = F(2\gamma - \theta, s_2(t(I)), s_2(t(J))) = F(2\gamma - \theta, s_1(I), s_1(J)) = F(\theta, I, J)$$

→ Soit r une rotation d'angle β . Il existe deux réflexions s_1 et s_2 d'axes respectifs $\Delta_\gamma(v_1)$ et $\Delta_{\gamma+\beta/2}(v_2)$ telles que : $r = s_2 \circ s_1$. D'après [P14], F est définie en $(2\gamma - \theta, s_1(I), s_1(J))$, et donc en $(2(\gamma+\beta/2) - (2\gamma - \theta), s_2(s_1(I)), s_2(s_1(J)))$, c'est-à-dire en $(\beta + \theta, r(I), r(J))$. De plus :

$$F(\beta + \theta, r(I), r(J)) = F(2(\gamma+\beta/2) - (\beta + \theta), s_2(r(I)), s_2(r(J))) = F(2\gamma - \theta, s_1(I), s_1(J)) = F(\theta, I, J)$$

→ Remarquons d'autre part que pour tout entier relatif k , F est définie en $(\theta + 2k\pi, I, J)$ et : $F(\theta + 2k\pi, I, J) = F(\theta, I, J)$. C'est un corollaire immédiat du résultat précédent : il suffit de considérer la rotation d'angle $2k\pi$.

❷ Démontrons : [P24] \Rightarrow [P14]

Soit (θ, I, J) un élément de T en lequel F est définie, s une réflexion d'axe $\Delta_\beta(v)$.

Il existe un réel w tel que $\Delta_\theta(w)$ porte I et J .

→ Supposons $\Delta_\beta(v)$ et $\Delta_\theta(w)$ parallèles.

Il existe alors une translation t telle que : $t(I) = s(I)$ et $t(J) = s(J)$. D'après [P24], F est définie en $(\theta, t(I), t(J))$, c'est-à-dire en $(\theta, s(I), s(J))$. Or $2\beta - \theta \equiv \theta \pmod{2\pi}$ puisque par hypothèse $\theta \equiv \beta \pmod{\pi}$. F est donc définie en $(2\beta - \theta, s(I), s(J))$, d'après la remarque qui clôture la partie ❶. Et nous avons :

$$F(2\beta - \theta, s(I), s(J)) = F(\theta, s(I), s(J)) = F(\theta, t(I), t(J)) = F(\theta, I, J)$$

→ Supposons $\Delta_\beta(v)$ et $\Delta_\theta(w)$ non parallèles.

Ces deux droites sont alors sécantes en un point C . La rotation r de centre C et d'angle $2(\beta - \theta)$ est telle que : $r(I) = s(I)$ et $r(J) = s(J)$. D'après [P24], F est définie en $(2(\beta - \theta) + \theta, r(I), r(J))$, c'est-à-dire en $(2\beta - \theta, s(I), s(J))$. Et nous avons : $F(2\beta - \theta, s(I), s(J)) = F(2(\beta - \theta) + \theta, r(I), r(J)) = F(\theta, I, J)$

(page 74, §3.2.1) **∇4**

Soit (θ, I, J) un élément de T .

Si I est vide, n vaut 0 : $\cup_{i \in 1..0} I_i = \cup_{i \in \emptyset} I_i = \emptyset$

F est alors définie en (θ, I, J) . Car toute proposition du type « $\forall x \in \emptyset, p(x)$ » est vraie.

Enfin F est nulle en (θ, I, J) : $F(\theta, I, J) = \sum_{i \in 1..0} \sum_{j \in 1..m} F(\theta, I_i, J_j) = \sum_{i \in \emptyset} \sum_{j \in 1..m} F(\theta, I_i, J_j) = 0$

De la même manière, si J est vide alors F est définie et nulle en (θ, I, J) .

(page 84, §4.1.1) **∇5**

Par hypothèse, (x, y, z) est un élément de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ tel que : $x+y \leq 0$ et $y+z > 0$. Nous avons en particulier : $0 < y+z < x+y+z \leq z$. Il en résulte que l'intégrale $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \varphi(u-v) dv) du$ est définie si et seulement si les intégrales $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^{y+z} \varphi(u-v) dv) du$, $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_{y+z}^{x+y+z} \varphi(u-v) dv) du$ et $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_{x+y+z}^z \varphi(u-v) dv) du$ le sont. Auquel cas f est donc définie en (x, y, z) et vaut :

$$\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^{y+z} \varphi(u-v) dv) du + \int_{y+z}^{x+y+z} (\int_{y+z}^{x+y+z} \varphi(u-v) dv) du + \int_{y+z}^{x+y+z} (\int_{x+y+z}^z \varphi(u-v) dv) du$$

En posant $U=u-y-z$ et $V=v-y-z$, il vient : $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_{y+z}^{x+y+z} \varphi(u-v) dv) du = \int_0^x (\int_0^x \varphi(U-V) dV) dU$.

Et en posant $U=u-x-y-z$ et $V=v-x-y-z$: $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_{x+y+z}^z \varphi(u-v) dv) du = \int_{-x}^0 (\int_0^{-x-y} \varphi(U-V) dV) dU$.

En conclusion, $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \varphi(u-v) dv) du$ est définie si et seulement si $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^{y+z} \varphi(u-v) dv) du$, $\int_0^x (\int_0^x \varphi(u-v) dv) du$ et $\int_{-x}^0 (\int_0^{-x-y} \varphi(u-v) dv) du$ le sont. Autrement dit, f est définie en (x, y, z) si et seulement si elle l'est en $(x, 0, y+z)$, $(x, -x, x)$ et $(x, y, -x-y)$. Et dans ce cas :

$$f(x, y, z) = f(x, 0, y+z) + f(x, -x, x) + f(x, y, -x-y)$$

(page 84, §4.1.2 ; page 85, §4.1.3) **∇6**

Soit (x, y, z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Si (x, y, z) appartient à la classe *equals* alors f_0 est définie en (x, y, z) et : $f_0(x, y, z) = x^2/2$. Si (x, y, z) appartient à la classe *after* alors f_0 est définie en (x, y, z) et : $f_0(x, y, z) = xz$. Ces résultats — et ceux concernant f_2 — se déduisent de résultats plus généraux justifiés dans $\nabla 9$ (point ①, cas $r < 1$; point ②, cas $r \neq 1$ et $r \neq 2$; point ②, cas $r = 2$).

(page 94, §5.1 ; page 98, §5.3.2) **∇7**

❶ Pour tout couple (A, B) d'objets nets disjoints d'une image numérique : $\mathcal{A}^{AB}(0) = F_0^{AB}(0)$. Démontrons-le dans le cas décrit par la figure 56 (à rapprocher de la figure 26c, §4.2.1).

Les calculs du paragraphe §4.2.1 donnent ici :

$$\begin{aligned} F_0^{AB}(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(0, A_0(v), B_0(v)) \cdot dv = \int_{v_1}^{v_2} F_0(0, A_0(v), B_0(v)) \cdot dv \\ &= \int_0^\varepsilon f_0(x(t), y(t), z(t)) \cdot dt = \int_0^\varepsilon f_0(x_1, y_1, z_1) \cdot dt = \int_0^\varepsilon x_1 z_1 \cdot dt = \varepsilon \cdot x_1 z_1 \end{aligned}$$

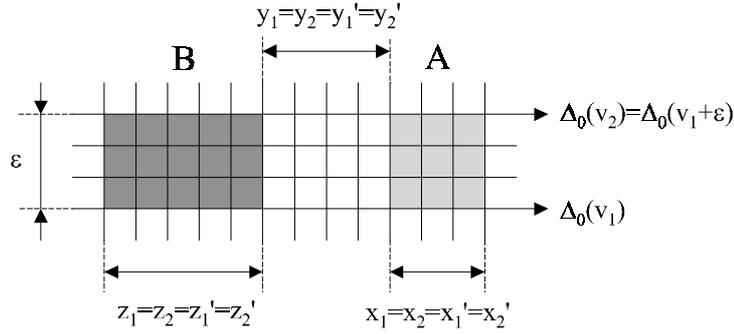


figure 56. $\mathcal{A}^{AB}(0) = F_0^{AB}(0)$

Nous pouvons bien entendu retrouver ce résultat en utilisant l'expression de Γ associée à la classe *AFTER* (§4.2.1, page 91) :

$$F_0^{AB}(0) = [1/(6 e_0^2)] \cdot \epsilon \cdot [(x_1' + x_2')(z_1' + z_2') + x_1' z_1' + x_2' z_2']$$

$$= [1/(6 \times 1^2)] \times \epsilon \times [(x_1 + x_1)(z_1 + z_1) + x_1 z_1 + x_1 z_1] = \epsilon \cdot x_1 z_1$$

Et nous obtiendrions encore le même résultat en appliquant le schéma de calcul décrit dans le paragraphe §4.2.2, il est très facile de le vérifier. Or d'après la définition d'un histogramme d'angles (définition 10, §5.1) : $\mathcal{A}^{AB}(0) = \epsilon \cdot x_1 z_1$. Car $\epsilon \cdot x_1 z_1$ est le nombre de couples (p,q) de $A \times B$ tels que : $\angle(q,p) \equiv 0 [2\pi]$. En conclusion : $\mathcal{A}^{AB}(0) = F_0^{AB}(0)$.

❷ Pour tout couple (A,B) d'objets disjoints d'une image numérique : $\mathcal{A}^{AB}(\pi/4) = F_0^{AB}(\pi/4) / \sqrt{2}$. Démonstrons-le dans le cas décrit par la figure 57. En reprenant les calculs du paragraphe §4.2.2, il vient :

$$F_0^{AB}(\pi/4) = e_{\pi/4} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_0(\pi/4, A_{\pi/4}(k \cdot e_{\pi/4}), B_{\pi/4}(k \cdot e_{\pi/4}))$$

$$= e_{\pi/4} \cdot [h \cdot (e_{\pi/4}^{-2} \cdot f_0(a,d,b)) + (h-1) \cdot (e_{\pi/4}^{-2} \cdot f_0(a-1,d+1,b-1))]$$

$$= e_{\pi/4} \cdot [h \cdot (e_{\pi/4}^{-2} \cdot ab) + (h-1) \cdot (e_{\pi/4}^{-2} \cdot (a-1)(b-1))]$$

$$= e_{\pi/4}^{-1} \cdot (h \cdot ab + (h-1) \cdot (a-1)(b-1))$$

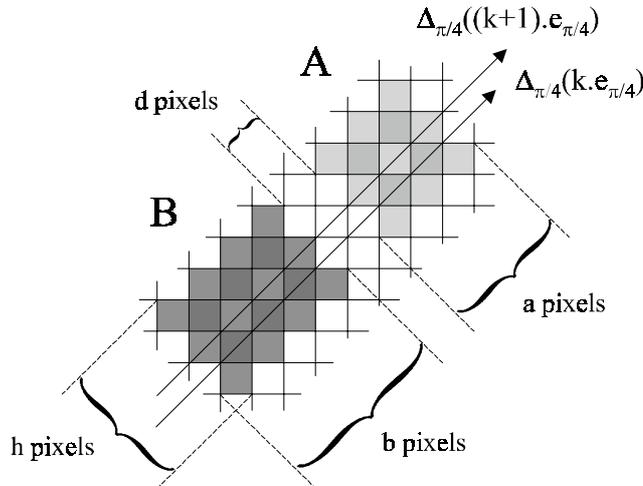


figure 57. $\mathcal{A}^{AB}(\pi/4) = F_0^{AB}(\pi/4) / \sqrt{2}$
(dans le cas précis représenté : a=3, b=4, d=1, h=3)

Or $h.ab+(h-1).(a-1)(b-1)$ est le nombre de couples (p,q) de $A \times B$ tels que : $\angle(q,p) \equiv \pi/4 \pmod{2\pi}$. C'est donc $\mathcal{A}^{AB}(\pi/4)$. Comme $e_{\pi/4}^{-1}$ vaut $\sqrt{2}$, nous avons bien : $\mathcal{A}^{AB}(\pi/4) = F_0^{AB}(\pi/4) / \sqrt{2}$. Observons que si a, b et h sont suffisamment grands, $F_0^{AB}(\pi/4)$ peut être assimilé à $2\sqrt{2} \cdot h.ab$, A peut être assimilé à un rectangle de largeur $a\sqrt{2}$ et de hauteur $h\sqrt{2}$, B à un rectangle de largeur $b\sqrt{2}$ et de hauteur $h\sqrt{2}$. Comme dans le cas ①, $F_0^{AB}(\pi/4)$ s'obtient donc en multipliant la hauteur commune des objets A et B par la largeur de A et la largeur de B .

(page 96, §5.2.3) **∇8**

\mathcal{I} est un ensemble de points du plan, fini et non vide. Pour tout réel θ , \mathcal{I}_θ dénote l'ensemble des couples (p,q) de points distincts de \mathcal{I} tels que : $\angle(p,q) \equiv \theta \pmod{2\pi}$. n est un entier positif non nul ; $(\alpha_i)_{i \in 1..n+1}$ une suite strictement décroissante de réels telle que $\alpha_1=1$ et $\alpha_{n+1}=0$; $(m_i)_{i \in 1..n}$ la suite $(\alpha_i - \alpha_{i+1})_{i \in 1..n}$. La fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou E de \mathcal{I} est notée μ_E . Enfin, pour tout i de $1..n$, E^i désigne l' α_i -coupe de E . Nous avons donc : $E^i = \{p \in \mathcal{I} / \mu_E(p) \geq \alpha_i\}$.

Proposition

Soit A et B deux sous-ensembles flous de \mathcal{I} tels que μ_A et μ_B prennent leurs valeurs dans $\{\alpha_i\}_{i \in 1..n+1}$. Nous avons : $\mathcal{A}^{AB} = \sum_{k \in 1..n} m_k \mathcal{A}^{A^k B^k}$

① Démontrons tout d'abord que pour tout couple (a,b) de points du plan :

$$\min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\} = \sum_{k \in 1..n} m_k \cdot \min\{\mu_{A^k}(a), \mu_{B^k}(b)\}$$

Notons i et j les éléments de $1..n+1$ tels que : $\mu_A(a) = \alpha_i$ et $\mu_B(b) = \alpha_j$ (1)

Sans nuire à la généralité de la démonstration, nous pouvons supposer que : $j \leq i$ (2)

Nous avons donc : $\alpha_i \leq \alpha_j$ (3)

Il est facile de vérifier, et ce sont d'ailleurs des résultats bien connus, que :

$$\mu_A(a) = \sum_{k \in 1..n} m_k \mu_{A^k}(a) \quad (4)$$

$$\mu_B(b) = \sum_{k \in 1..n} m_k \mu_{B^k}(b) \quad (5)$$

Ces égalités découlent des faits suivants :

$$\forall k \in 1..n, [(k < i \Rightarrow \mu_{A^k}(a)=0) \text{ et } (i \leq k \Rightarrow \mu_{A^k}(a)=1)] \quad (6)$$

$$\forall k \in 1..n, [(k < j \Rightarrow \mu_{B^k}(b)=0) \text{ et } (j \leq k \Rightarrow \mu_{B^k}(b)=1)] \quad (7)$$

Soit k un élément de $1..n$.

Si k est strictement inférieur à i , d'après (6) $\mu_{A^k}(a)$ vaut 0.

Nous avons donc : $\min\{\mu_{A^k}(a), \mu_{B^k}(b)\} = \mu_{A^k}(a)$

Si k est supérieur ou égal à i , d'après (2) il est aussi supérieur ou égal à j .

D'après (7) $\mu_{B^k}(b)$ vaut donc 1. D'où : $\min\{\mu_{A^k}(a), \mu_{B^k}(b)\} = \mu_{A^k}(a)$

Par conséquent : $\sum_{k \in 1..n} m_k \min\{\mu_{A^k}(a), \mu_{B^k}(b)\} = \sum_{k \in 1..n} m_k \mu_{A^k}(a) = \alpha_i = \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}$

La dernière égalité découle de (1) et (3), l'avant-dernière de (1) et (4).

- ② Soit θ un réel quelconque. En appliquant tour à tour la définition de \mathcal{A}^{AB} et le lemme précédent, il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{AB}(\theta) &= \sum_{(a,b) \in \mathcal{I}_\theta} \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\} = \sum_{(a,b) \in \mathcal{I}_\theta} \sum_{k \in 1..n} m_k \cdot \min\{\mu_{A^k}(a), \mu_{B^k}(b)\} \\ &= \sum_{k \in 1..n} m_k (\sum_{(a,b) \in \mathcal{I}_\theta} \min\{\mu_{A^k}(a), \mu_{B^k}(b)\}) = \sum_{k \in 1..n} m_k \mathcal{A}^{A^k B^k}(\theta)\end{aligned}$$

Autrement dit : $\mathcal{A}^{AB} = \sum_{k \in 1..n} m_k \mathcal{A}^{A^k B^k}$

(page 106, §6.2.2) **∇9**

Soit r un réel positif et soit d, d_1, D et d_2 quatre réels strictement positifs.

La fonction f_r est-elle définie en $(d, -d, d)$? D'autre part, que dire des limites suivantes ?

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f_r(d_1, y, d_2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_r(x, D, d_2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow +\infty}} f_r(x, D, z)$$

- ① Tout d'abord, f_r est-elle définie en $(d, -d, d)$?

→ Cas : $r < 1$

Pour tout élément u de $[0, d]$, l'intégrale $\int_0^d \varphi_r(u-v) dv$ est définie et vaut : $\frac{1}{1-r} u^{1-r}$

En effet : $\forall u \in]0, d]$, $(\lim_{w \rightarrow u^-} \int_0^w \frac{dv}{(u-v)^r} = \frac{1}{1-r} u^{1-r} \text{ et } \int_u^d \varphi_r(u-v) dv = 0)$

Du même coup, f_r est définie en $(d, -d, d)$:

$$f_r(d, -d, d) = \int_0^d (\int_0^d \varphi_r(u-v) dv) du = \int_0^d \frac{1}{1-r} u^{1-r} du = \frac{1}{(1-r)(2-r)} d^{2-r}$$

→ Cas : $r \geq 1$

Nous avons cette fois : $\forall u \in]0, d]$, $\lim_{w \rightarrow u^-} \int_0^w \frac{dv}{(u-v)^r} = +\infty$

Il en résulte que f_r n'est pas définie en $(d, -d, d)$.

- ② Avant d'aborder l'étude même des limites, recherchons comment s'exprime $f_r(d_1, D, d_2)$ en fonction de la valeur de r .

→ Cas : $r=1$

$$\begin{aligned}f_1(d_1, D, d_2) &= \int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} (\int_0^{d_2} \varphi_1(u-v) dv) du = \int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} (\int_0^{d_2} \frac{dv}{u-v}) du = -\int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} [\ln(u-v)]_{v=0}^{v=d_2} du \\ &= D \cdot \ln(D) + (d_1+D+d_2) \cdot \ln(d_1+D+d_2) - (d_1+D) \cdot \ln(d_1+D) - (D+d_2) \cdot \ln(D+d_2)\end{aligned}$$

→ Cas : $r=2$

$$\begin{aligned}f_2(d_1, D, d_2) &= \int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} (\int_0^{d_2} \varphi_2(u-v) dv) du = \int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} (\int_0^{d_2} \frac{dv}{(u-v)^2}) du \\ &= \int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} [(u-v)^{-1}]_{v=0}^{v=d_2} du = \ln \frac{(d_1+D)(D+d_2)}{D(d_1+D+d_2)}\end{aligned}$$

→ Cas : $r \neq 1$ et $r \neq 2$

$$\begin{aligned} f_r(d_1, D, d_2) &= \int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} \left(\int_0^{d_2} \varphi_r(u-v) dv \right) du = \int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} \left(\int_0^{d_2} \frac{dv}{(u-v)^r} \right) du \\ &= -\frac{1}{1-r} \int_{D+d_2}^{d_1+D+d_2} [(u-v)^{1-r}]_{v=0}^{v=d_2} du = \frac{1}{(1-r)(2-r)} [D^{2-r} - (d_1+D)^{2-r} - (D+d_2)^{2-r} + (d_1+D+d_2)^{2-r}] \end{aligned}$$

③ Etudions enfin les limites indiquées, en nous appuyant sur les expressions précédentes.

→ Cas : $r < 1$

$$\begin{aligned} \diamond \lim_{y \rightarrow 0^+} f_r(d_1, y, d_2) &= \frac{1}{(1-r)(2-r)} [(d_1+d_2)^{2-r} - d_1^{2-r} - d_2^{2-r}] \\ \diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+D+d_2)^{2-r} - (x+D)^{2-r}] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+D)^{2-r} \cdot \left[\left(1 + \frac{d_2}{x+D}\right)^{2-r} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{x+D} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+D)^{2-r} \cdot \left[(2-r) \frac{d_2}{x+D} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} d_2(2-r)(x+D)^{1-r} = +\infty \end{aligned}$$

L'égalité 1 résulte du fait que pour tout réel m : $(1+u)^m - (1+m \cdot u) \underset{0}{\ll} u$

En conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_r(x, D, d_2) \underset{2}{=} +\infty$

♦ Nous avons évidemment : $\forall (x, z) \in \mathbf{R}_+^2, z > d_2 \Rightarrow f_1(x, D, z) \geq f_1(x, D, d_2)$

De l'égalité 2, on peut donc déduire : $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow +\infty}} f_r(x, D, y) = +\infty$

→ Cas : $r = 1$

$$\begin{aligned} \diamond \lim_{y \rightarrow 0^+} f_1(d_1, y, d_2) &= (d_1+d_2) \cdot \ln(d_1+d_2) - d_1 \cdot \ln(d_1) - d_2 \cdot \ln(d_2) \\ \diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+D+d_2) \cdot \ln(x+D+d_2) - (x+D) \cdot \ln(x+D)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+D) \cdot \ln\left(\frac{x+D+d_2}{x+D}\right) + d_2 \cdot \ln(x+D+d_2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+D) \frac{d_2}{x+D} + d_2 \cdot \ln(x+D+d_2) \right] = +\infty \end{aligned}$$

L'égalité 3 découle du fait que : $\ln(1+u) - u \underset{0}{\ll} u$

En conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x, D, d_2) = +\infty$

♦ De l'égalité précédente, on peut déduire : $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow +\infty}} f_1(x, D, z) = +\infty$

→ Cas : $1 < r < 2$

$$\begin{aligned} \diamond \lim_{y \rightarrow 0^+} f_r(d_1, y, d_2) &= \frac{1}{(1-r)(2-r)} [(d_1+d_2)^{2-r} - d_1^{2-r} - d_2^{2-r}] \\ \diamond \text{ Nous avons comme précédemment (étude du cas } r < 1) : \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+D+d_2)^{2-r} - (x+D)^{2-r}] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} d_2(2-r)(x+D)^{1-r} \end{aligned}$$

Ce qui donne ici : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+D+d_2)^{2-r} - (x+D)^{2-r}] = 0$

Par conséquent : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_r(x, D, d_2) = \frac{1}{(1-r)(2-r)} [D^{2-r} - (D+d_2)^{2-r}]$

- ♦ La dernière égalité nous permet d'écrire : $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow +\infty}} f_r(x,D,z) = +\infty$

→ cas $r=2$

- ♦ $\lim_{y \rightarrow 0^+} f_2(d_1,y,d_2) = +\infty$
- ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x,D,d_2) = \ln \frac{D+d_2}{D}$
- ♦ Et d'après cette dernière égalité : $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow +\infty}} f_2(x,D,z) = +\infty$

→ Cas : $r > 2$

- ♦ $\lim_{y \rightarrow 0^+} f_r(d_1,y,d_2) = +\infty$
- ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_r(x,D,d_2) = \frac{1}{(1-r)(2-r)} [D^{2-r} - (D+d_2)^{2-r}]$
- ♦ $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow +\infty}} f_r(x,D,z) = \frac{1}{(1-r)(2-r)} D^{2-r}$

(page 108, §6.3.1) **∇10**

les propriétés de l'opérateur *

La continuité est un gage de robustesse. C'est une propriété analytique satisfaite par la plupart des opérateurs de fusion d'informations. La commutativité et l'associativité sont des propriétés algébriques généralement adoptées elles aussi (*Bloc94*). Leur intérêt ici est non seulement de faciliter la combinaison des informations mais également de garantir la symétrie de F exprimée par [P13]. Justifions maintenant la propriété de monotonie. Dans le paragraphe §3.1.3 nous avons incité le lecteur à considérer $F(\theta,I,J)$ comme un poids. Appuyons-nous à nouveau sur cette interprétation. Soit A et B deux objets nets et soit M et N deux points d'une droite orientée $\Delta_\theta(v)$. Si M appartient à A , N à B , et si l'abscisse de M sur $\Delta_\theta(v)$ est supérieure à celle de N , (M,N) constitue évidemment un argument en faveur de la proposition « A se situe dans la direction θ par rapport à B ». Il semble alors naturel d'adhérer au point de vue suivant : plus l'observateur rattaché à la droite $\Delta_\theta(v)$ trouvera de tels couples (M,N) et plus il pourra soutenir la proposition énoncée. C'est ce qu'exprime la croissance des fonctions partielles $*(\cdot,y)$ et $*(x,\cdot)$. Légitimons maintenant le rôle d'élément neutre attribué à 0 . Considérons un élément (θ,IUJ,L) de T tel que celui représenté par la figure 58, fixons toutes les bornes des intervalles I , J et L , excepté b_j^θ , et faisons tendre cette dernière valeur vers a_j^θ . J tend alors vers un singleton. Le souci de préserver la continuité nous incite à le négliger, c'est-à-dire à poser :

$$\lim_{b_j^\theta \rightarrow a_j^\theta} F(\theta,J,L) \stackrel{1}{=} F(\theta,\emptyset,L) \quad \text{et} \quad \lim_{b_j^\theta \rightarrow a_j^\theta} F(\theta,IUJ,L) \stackrel{2}{=} F(\theta,I,L)$$

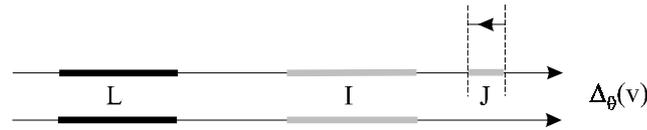


figure 58. Propriétés de l'opérateur * .

Attribuer à 0 le rôle d'élément neutre découle du souci d'avoir :
 $\lim F(\theta, J, L) = F(\theta, \emptyset, L)$ et $\lim F(\theta, I \cup J, L) = F(\theta, I, L)$

Revenons au point de vue exprimé plus haut. Son pendant est que si l'observateur ne trouve aucun couple (M,N) du type indiqué, alors il n'aura en sa possession aucun élément pour soutenir la proposition « A se situe dans la direction θ par rapport à B ». Il paraît donc naturel de considérer nul le second membre de l'égalité 1. Il vient en définitive :

$$\lim_{b_j^\theta \rightarrow a_j^\theta} f(d_j, D_{jL}^\theta, d_L) \stackrel{3}{=} 0 \text{ puis } f(0, D_{jL}^\theta, d_L) \stackrel{4}{=} 0$$

L'égalité 3 découle de [P9], la 4 de la continuité supposée de f.

L'égalité 2 donne pour sa part :

$$\begin{aligned} \lim_{b_j^\theta \rightarrow a_j^\theta} [F(\theta, I, L) * F(\theta, J, L)] &\stackrel{5}{=} F(\theta, I, L) \\ F(\theta, I, L) * \lim_{b_j^\theta \rightarrow a_j^\theta} f(d_j, D_{jL}^\theta, d_L) &\stackrel{6}{=} F(\theta, I, L) \\ F(\theta, I, L) * f(0, D_{jL}^\theta, d_L) &\stackrel{7}{=} F(\theta, I, L) \\ F(\theta, I, L) * 0 &\stackrel{8}{=} F(\theta, I, L) \end{aligned}$$

L'égalité 5 découle de [P10*] ; la 6 de [P9] et de la continuité supposée de * ; la 7 de la continuité supposée de f ; la 8 de l'égalité 4. 0 étant reconnu comme l'élément neutre de *, on peut considérer que [P25] se déduit de [P10*] (comme elle se déduisait de [P10]).



(page 109, §6.3.2) **V11**

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}_+^2, \min(1,a) \hat{+} \min(1,b) = \min(1,a+b)$$

❶ Pseudo-inverses

Soit g une fonction de [0,1] vers \mathbf{R}_+ , nulle en 0, continue et strictement croissante sur [0,1]. Pour tout élément a de [0,g(1)] il existe un élément u de [0,1], et un seul, tel que : g(u)=a. On définit ainsi une fonction de [0,g(1)] sur [0,1]. Elle peut être prolongée sur \mathbf{R}_+ en convenant d'associer la valeur 1 à tout élément a de]g(1),+∞[. On obtient alors la pseudo-inverse de g, notée $g^{(-1)}$.

❷ t-conormes (Meng42)

Une t-conorme est une application \perp de $[0,1]^2$ vers $[0,1]$ possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall u \in [0,1], u \perp 0 = 0 \perp u = u \\ \forall (u,v) \in [0,1]^2, u \perp v = v \perp u \\ \forall (u,v,w) \in [0,1]^3, (u \perp v) \perp w = u \perp (v \perp w) \\ \forall (u,v) \in [0,1]^2, \forall (u',v') \in [0,1]^2, (u \leq u' \text{ et } v \leq v') \Rightarrow u \perp v \leq u' \perp v' \end{aligned}$$

③ *t-conormes archimédiennes*

Une t -conorme \perp est dite *archimédienne* si et seulement si : $\forall a \in]0,1[$, $a \perp a > a$. On montre que si une t -conorme est continue et archimédienne il existe une fonction g de $[0,1]$ vers \mathbf{R}_+ , nulle en 0, continue et strictement croissante sur $[0,1]$, telle que :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2, u \perp v = g^{(-1)}(g(u)+g(v))$$

On dit de g que c'est une *génératrice* de \perp .

Sa pseudo-inverse possède la propriété suivante :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}_+^2, g^{(-1)}(a) \perp g^{(-1)}(b) = g^{(-1)}(a+b)$$

④ *Cas de la t-conorme de Lukasiewicz*

Il est facile de vérifier que la fonction de $[0,1]$ vers \mathbf{R}_+ qui à tout u associe u génère la t -conorme $\hat{+}$ de Lukasiewicz. Sa pseudo-inverse associe $\min(1,a)$ à tout réel positif a . Nous avons donc, en appliquant la propriété précédente :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}_+^2, \min(1,a) \hat{+} \min(1,b) = \min(1,a+b)$$

ANNEXE B

Liste des propriétés

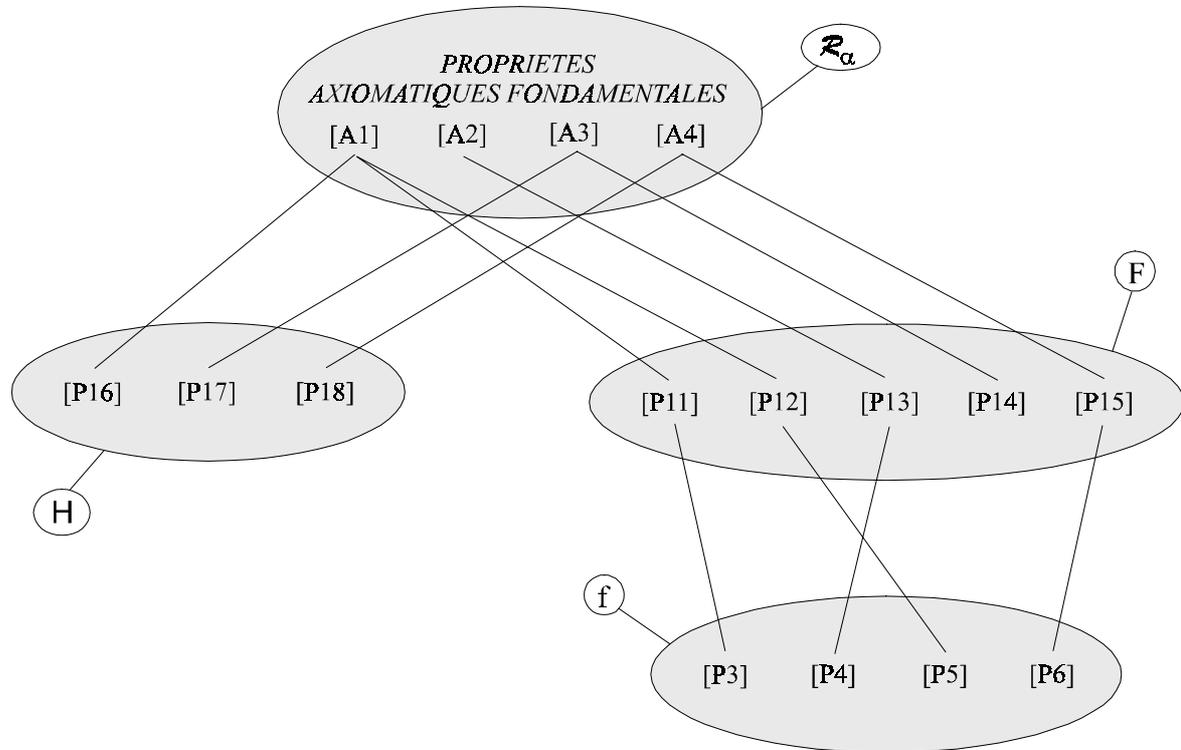


figure 59. Principaux liens entre les différentes propriétés.

Propriétés axiomatiques fondamentales

La propriété [A1] exprime un lien entre une application μ de \mathbf{R} vers $[0,1]$ et une famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de relations binaires floues entre objets nets. Les propriétés [A2] à [A4] sont définies pour toute famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de relations binaires floues entre objets nets.

- | | |
|------|--|
| [A1] | Soit A et B deux objets nets, α et β deux réels. Notons $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur \vec{u} . Il existe un réel k_0 tel que : pour toute valeur de k supérieure à k_0 , le couple $(t_{k \cdot \vec{i}_\beta}(A), B)$ est évaluable. De plus : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_\alpha(t_{k \cdot \vec{i}_\beta}(A), B) = \mu(\beta - \alpha)$ |
| [A2] | Soit A et B deux objets nets, α un réel. Si (A, B) est évaluable, (B, A) l'est également et : $\mathcal{R}_{\alpha + \pi}(B, A) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$ |
| [A3] | Soit A et B deux objets nets, α un réel, sym une réflexion d'axe $\Delta_\beta(v)$. Si (A, B) est évaluable, $(\text{sym}(A), \text{sym}(B))$ l'est également et : $\mathcal{R}_{2\beta - \alpha}(\text{sym}(A), \text{sym}(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$ |
| [A4] | Soit A et B deux objets nets, α un réel, hom une homothétie du plan de rapport strictement positif. Si (A, B) est évaluable, $(\text{hom}(A), \text{hom}(B))$ l'est également et : $\mathcal{R}_\alpha(\text{hom}(A), \text{hom}(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$ |

Autres propriétés essentielles



La propriété [P1] est définie pour toute fonction φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ .

- [P1]** φ est nulle sur \mathbf{R}_- et continue sur \mathbf{R}_+^* .
D'autre part, elle n'est nulle sur aucun intervalle ouvert non vide de \mathbf{R}_+^* .

La propriété [P2] exprime un lien entre une fonction φ de \mathbf{R} vers \mathbf{R}_+ , une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ , et un sous-ensemble E de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$. Lorsqu'elle est vérifiée, on dit que φ *génère* f sur E (définition 5).

- [P2]** Soit (x,y,z) un élément de E . f est définie en (x,y,z) si et seulement si l'intégrale $\int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \varphi(u-v)dv)du$ est définie. Auquel cas : $f(x,y,z) = \int_{y+z}^{x+y+z} (\int_0^z \varphi(u-v)dv)du$



Les propriétés [P3] à [P8] sont définies pour toute fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ .

- [P3]** f est définie sur $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0 \text{ ou } y > 0\}$ et nulle sur $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ / x+y+z < 0\}$.
D'autre part, elle ne s'annule pas sur $\mathbf{R}_+^*{}^3$.
- [P4]** Soit (x,y,z) un élément de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$.
Si f est définie en (x,y,z) alors elle l'est en (z,y,x) et : $f(z,y,x) = f(x,y,z)$
- [P5]** Soit x_1, x_2, y et z quatre réels positifs, avec y non nul. Si f est définie en (x_1,y,z) et (x_2,x_1+y,z) alors elle l'est en (x_1+x_2,y,z) et : $f(x_1+x_2,y,z) = f(x_1,y,z) + f(x_2,x_1+y,z)$
- [P6]** Il existe une application g de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* telle que pour tout élément (x,y,z) de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ et pour tout élément k de \mathbf{R}_+^* , si f est définie en (x,y,z) alors elle l'est en (kx,ky,kz) et : $f(kx,ky,kz) = g(k).f(x,y,z)$

- [P7]** Soit x, y_1, y_2 et z quatre réels positifs, avec y_1 et y_2 non nuls.
Si f est définie en (x,y_1,z) alors elle l'est en (x,y_2,z) et : $f(x,y_2,z) = f(x,y_1,z)$
- [P8]** Soit x, y, z et k quatre réels positifs, avec y et k non nuls.
Si f est définie en (x,y,z) alors elle l'est en (kx,ky,kz) et : $f(kx,ky,kz) = f(x,y,z)$

f

La propriété [P9] exprime un lien entre une fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ et une fonction F de T vers \mathbf{R}_+ . La propriété [P10] est définie pour toute fonction F de T vers \mathbf{R}_+ . Si f et F se partagent [P9] alors que F vérifie [P10], on dit que f *génère* F (définition 4).

- [P9]** Soit θ un réel, I et J deux segments tels que (θ, I, J) appartienne à T . F est définie en (θ, I, J) si et seulement si f est définie en $(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$. Et dans ce cas : $F(\theta, I, J) = f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$
- [P10]** Soit (θ, I, J) un élément de T . Il existe un ensemble $\{I_i\}_{i \in 1..n}$ de segments deux à deux disjoints, et un seul, tel que : $I = \cup_{i \in 1..n} I_i$. De même, il existe un ensemble $\{J_j\}_{j \in 1..m}$ de segments deux à deux disjoints, et un seul, tel que : $J = \cup_{j \in 1..m} J_j$. F est définie en (θ, I, J) si et seulement si elle l'est en (θ, I_i, J_j) pour tout élément i de $1..n$ et pour tout élément j de $1..m$. Auquel cas : $F(\theta, I, J) = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..m} F(\theta, I_i, J_j)$

F

Les propriétés [P11] à [P15] sont définies pour toute fonction F de T vers \mathbf{R}_+ .

- [P11]** Soit θ un réel, I et J deux segments disjoints non dégénérés tels que (θ, I, J) appartienne à T . F est définie en (θ, I, J) . De plus, F prend une valeur non nulle en (θ, I, J) si et seulement si il existe un élément (M, N) de $I \times J$ tel que M soit dans la direction θ de N : $F(\theta, I, J) \neq 0 \Leftrightarrow (\exists (M, N) \in I \times J / \angle(N, M) = \theta [2\pi])$
- [P12]** Soit (θ, I', J') un élément de T , I et J deux segments disjoints tels que (θ, I, J) appartienne à T . Si I' et J' sont inclus respectivement dans I et J alors F est définie en (θ, I', J') et : $F(\theta, I', J') \leq F(\theta, I, J)$
- [P13]** Soit (θ, I, J) un élément de T . Si F est définie en (θ, I, J) alors elle l'est en $(\theta + \pi, J, I)$ et : $F(\theta + \pi, J, I) = F(\theta, I, J)$
- [P14]** Soit (θ, I, J) un élément de T , sym une réflexion d'axe $\Delta_\beta(v)$. Si F est définie en (θ, I, J) alors elle l'est en $(2\beta - \theta, \text{sym}(I), \text{sym}(J))$ et : $F(2\beta - \theta, \text{sym}(I), \text{sym}(J)) = F(\theta, I, J)$
- [P15]** Il existe une application G de \mathbf{R}_+^* vers \mathbf{R}_+^* telle que pour tout élément (θ, I, J) de T et pour toute homothétie hom de rapport k strictement positif, si F est définie en (θ, I, J) alors elle l'est en $(\theta, \text{hom}(I), \text{hom}(J))$ et : $F(\theta, \text{hom}(I), \text{hom}(J)) = G(k).F(\theta, I, J)$

H

La propriété [P16] exprime un lien entre une application H de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$ et une application μ de \mathbf{R} vers $[0,1]$. Les propriétés [P17] et [P18] sont définies pour toute application H de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$.

[P16] Pour tout couple (δ, η) de réels, avec η strictement positif, il existe un élément ε de $]0, \pi[$ tel que : $\forall h \in \text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$, $[(h \neq 0 \text{ et } h_{|[\delta-\pi, \delta-\varepsilon] \cup [\delta+\varepsilon, \delta+\pi]} = 0) \Rightarrow |H(h) - \mu(\delta)| < \eta]$

[P17] $\forall (h_1, h_2) \in \text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)^2$, $(\forall \theta \in \mathbf{R}, h_1(-\theta) = h_2(\theta)) \Rightarrow H(h_1) = H(h_2)$

[P18] $\forall (h_1, h_2) \in \text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)^2$, $(\exists K \in \mathbf{R}_+^* / h_1 = K \cdot h_2) \Rightarrow H(h_1) = H(h_2)$

\mathcal{R}_α

La propriété [P19] exprime un lien entre une fonction F de T vers \mathbf{R}_+ et une famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de relations binaires floues entre objets nets. Lorsqu'elle est vérifiée, on dit que $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ s'informe par le biais des F-histogrammes (définition 7).

[P19] Soit (A, B) et (C, D) deux couples quelconques d'objets nets. Le couple (A, B) est évaluable — relativement à $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ — si et seulement si il est F-évaluable. D'autre part, si (A, B) et (C, D) sont évaluable : $F^{AB} = F^{CD} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}, \mathcal{R}_\alpha(A, B) = \mathcal{R}_\alpha(C, D)$

La propriété [P20] exprime un lien entre une fonction F de T vers \mathbf{R}_+ , une application H de $\text{App}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ vers $[0,1]$ et une famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de relations binaires floues entre objets nets. Lorsqu'elle est vérifiée, on dit que F et H génèrent $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ (définition 8).

[P20] Soit (A, B) un couple d'objets nets. (A, B) est évaluable — relativement à $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ — si et seulement si il est F-évaluable. Auquel cas : $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \mathcal{R}_\alpha(A, B) = H(F^{AB} \oplus \alpha)$

Propriétés secondaires

Les propriétés [P21] à [P23] sont définies pour toute fonction f de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ vers \mathbf{R}_+ .

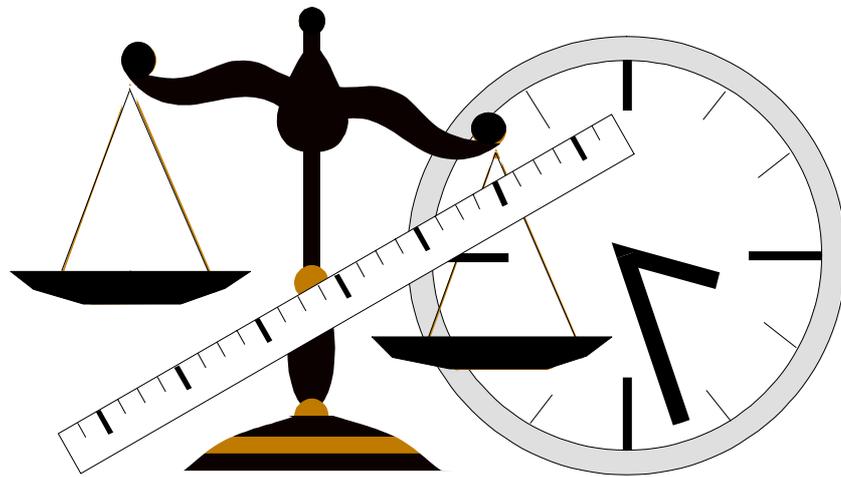
- [P21] Il existe un réel strictement positif y_0 tel que pour tout quadruplet (x, y_1, y_2, z) de réels positifs, avec y_1 et y_2 non nuls, si f est définie en (x, y_1, z) alors elle l'est en (x, y_2, z) et :
 $(x + y_1 + z < y_0 \text{ et } x + y_2 + z < y_0) \Rightarrow f(x, y_2, z) = f(x, y_1, z)$
- [P22] Il existe un réel strictement positif y_0 tel que pour tout quadruplet (x, y, z, k) de réels positifs, avec y et k non nuls, si f est définie en (x, y, z) alors elle l'est en (kx, ky, kz) et :
 $(ky > y_0 \text{ et } y > y_0) \Rightarrow f(kx, ky, kz) = f(x, y, z)$
- [P23] Soit x, y, z et k quatre réels positifs, avec y et k non nuls.
 Si f est définie en (x, y, z) alors elle l'est en (kx, ky, kz) et : $f(kx, ky, kz) = k^2 \cdot f(x, y, z)$

Les propriétés [P24] à [P26] sont définies pour toute fonction F de T vers \mathbf{R}_+ .

- [P24] Soit (θ, I, J) un élément de T , t une translation du plan, r une rotation d'angle β .
 Si F est définie en (θ, I, J) alors elle l'est en $(\theta, t(I), t(J))$ et $(\beta + \theta, r(I), r(J))$. De plus :
 $F(\theta, t(I), t(J)) = F(\theta, I, J)$ et $F(\beta + \theta, r(I), r(J)) = F(\theta, I, J)$
- [P25] Soit (θ, I, J) un élément de T . F est définie en (θ, \emptyset, J) , (θ, I, \emptyset) et $(\theta, \emptyset, \emptyset)$.
 De plus : $F(\theta, \emptyset, J) = F(\theta, I, \emptyset) = F(\theta, \emptyset, \emptyset) = 0$
- [P26] Soit (θ, I, J) un élément de T , hom une homothétie de rapport k strictement positif. Si F est définie en (θ, I, J) alors elle l'est en $(\theta, hom(I), hom(J))$ et :
 $F(\theta, hom(I), hom(J)) = F(\theta, I, J)$

La propriété [P27] est définie pour toute famille $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ de relations binaires floues entre objets nets.

- [P27] Soit A et B deux objets nets, α un réel, t une translation du plan, r une rotation d'angle β . Si (A, B) est évaluable, $(t(A), t(B))$ et $(r(A), r(B))$ le sont également.
 De plus : $\mathcal{R}_\alpha(t(A), t(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$ et $\mathcal{R}_{\beta + \alpha}(r(A), r(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$

ANNEXE C**Tables comparatives**

This table is not available.
Sorry for the inconvenience.

table 1. *Discrétisation de l'ensemble des directions et représentation cartésienne des histogrammes.*

Sur l'axe des abscisses l'unité est le radian. L'unité de temps est la seconde CPU.

Tous les histogrammes ont été normalisés (§5.2.2).

This table is not available.
Sorry for the inconvenience.

table 2. *Discretisation de l'ensemble des directions et représentation pseudo-polaire des histogrammes.*

This table is not available.
Sorry for the inconvenience.

table 3. *Allongement de l'argument.*

This table is not available.
Sorry for the inconvenience.

table 4. *Configurations diverses.*

Les deux dernières ont été proposées par Miyajima et Ralescu dans  *Miya94b*.

This table is not available.
Sorry for the inconvenience.

table 5. *La leçon de géographie.*

This table is not available.
Sorry for the inconvenience.

table 6. *Impact du paramètre r sur les F_r -histogrammes.*



0
0 **B** 100
0

15
0 **K** 71
15

23
0 **M** 78
23

0
0 **F0** 100
0

0
0 **F2** 100
0

39
0 **B** 61
0

39
0 **K** 60
1

42
0 **M** 59
3

39
0 **F0** 88
0

24
0 **F2** 98
0

70
0 **B** 30
0

60
0 **K** 40
0

65
0 **M** 35
0

74
0 **F0** 49
0

66
0 **F2** 55
0

97
0 **B** 3
0

89
0 **K** 11
0

97
0 **M** 3
0

91
0 **F0** 11
0

91
0 **F2** 11
0

table 7. Objets nets disjoints. Déplacement de l'argument.



0
0 **B** 0
100

0
10 **K** 10
80

0
12 **M** 12
88

0
0 **F0** 0
100

0
0 **F2** 0
100

0
0 **B** 82
18

0
2 **K** 60
38

0
12 **M** 71
29

0
0 **F0** 54
76

0
0 **F2** 21
99

0
0 **B** 99
1

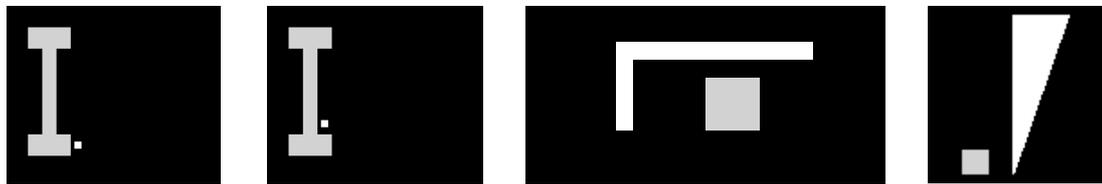
0
1 **K** 84
15

0
12 **M** 91
9

0
0 **F0** 72
56

0
0 **F2** 22
99

table 8. Objets nets disjoints. Allongement de l'argument.



| | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0 0 B 22 78 | 0 0 B 17 84 | 50 50 B 0 0 | 74 0 B 27 0 |
| 2 0 K 45 53 | 20 1 K 29 51 | 43 44 K 12 1 | 67 0 K 38 0 |
| 8 0 M 34 64 | 53 3 M 24 83 | 39 61 M 38 4 | 68 0 M 32 5 |
| 0 0 F0 95 36 | 0 0 F0 71 29 | 80 26 F0 0 0 | 73 0 F0 55 0 |
| 0 0 F2 100 3 | 0 0 F2 78 18 | 94 9 F2 0 0 | 43 0 F2 86 0 |

table 9. Objets nets disjoints. Configurations diverses.
 Les deux premiers exemples ont été proposés par Miyajima et Ralescu dans *Miya94b*,
 le troisième par Rosenfeld et Kak dans *Rose82*.



| | | | |
|---|---|--|--|
| $\begin{matrix} 0 \\ 100 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 100 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 100 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 100 \\ 0 \end{matrix}$ |
| $\begin{matrix} 17 \\ 67 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 0 \\ 17 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 25 \\ 51 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 0 \\ 25 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 29 \\ 38 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 4 \\ 29 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 25 \\ 25 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 25 \\ 25 \end{matrix}$ |
| $\begin{matrix} 26 \\ 74 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 0 \\ 26 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 48 \\ 52 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 0 \\ 48 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 50 \\ 50 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 10 \\ 50 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 50 \\ 50 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 50 \\ 50 \end{matrix}$ |
| $\begin{matrix} 0 \\ 100 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 96 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 48 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ |
| $\begin{matrix} 0 \\ 100 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 95 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 44 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 0 \\ 0 \end{matrix}$ |

table 10. Objets nets disjoints. Encerclement du référent.

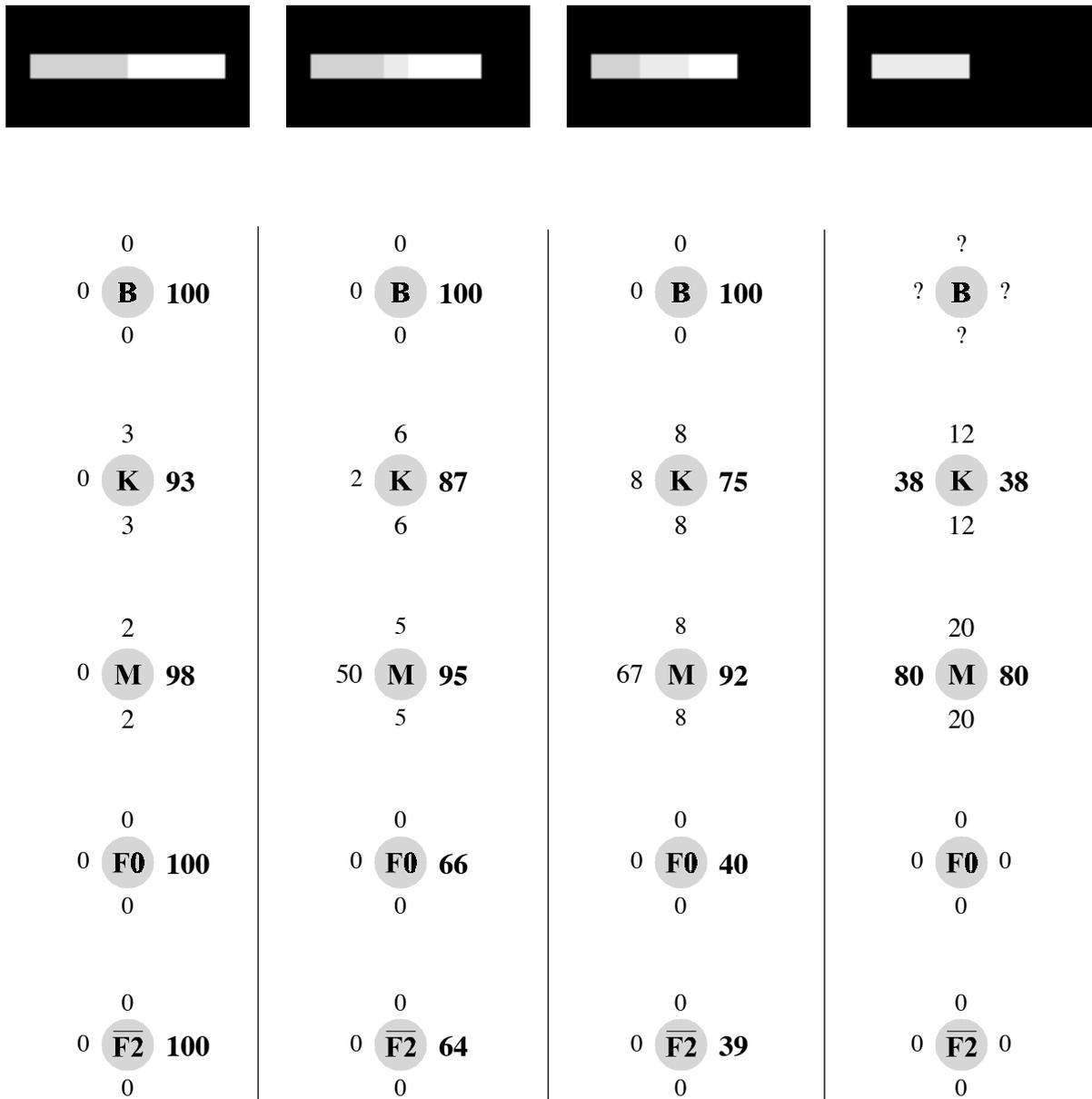
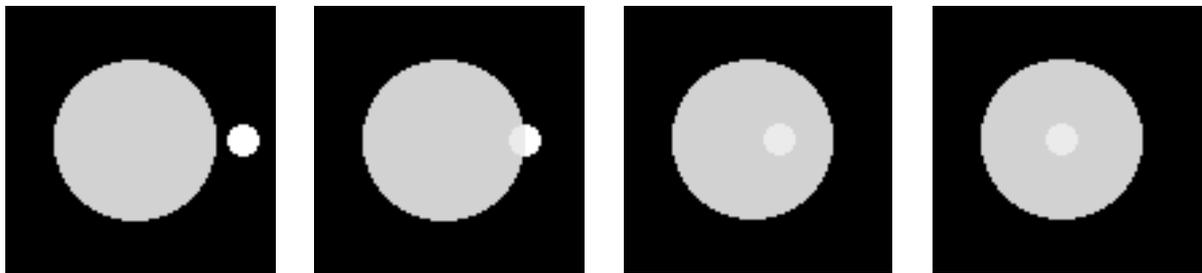


table 11. Chevauchement d'objets nets. Cas de coïncidence.



| | | | |
|--|---|---|---|
| $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 100 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 100 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 100 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 100 \\ 0 \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} 11 \\ 0 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 78 \\ 11 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 15 \\ 0 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 70 \\ 15 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 24 \\ 13 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 39 \\ 24 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 25 \\ 25 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 25 \\ 25 \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} 14 \\ 0 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 86 \\ 14 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 24 \\ 20 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 76 \\ 24 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 43 \\ 43 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 57 \\ 43 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 50 \\ 50 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 50 \\ 50 \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 100 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 84 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 16 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 0 \\ 0 \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 100 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 79 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 15 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 0 \\ 0 \end{array}$ |

table 12. Chevauchement d'objets nets. Cas d'inclusion.



| | | | |
|---|---|--|--|
| $\begin{array}{c} 0 \\ 33 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 0 \\ \mathbf{67} \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 67 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 0 \\ 33 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 81 \\ 19 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 0 \text{ } \mathbf{B} \text{ } 12 \\ \mathbf{88} \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} 33 \\ 22 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 3 \\ \mathbf{43} \end{array}$ | $\begin{array}{c} 17 \\ 40 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 1 \\ \mathbf{43} \end{array}$ | $\begin{array}{c} 26 \\ 9 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 28 \\ \mathbf{37} \end{array}$ | $\begin{array}{c} 11 \\ 7 \text{ } \mathbf{K} \text{ } 17 \\ \mathbf{65} \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} 80 \\ 18 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 7 \\ \mathbf{81} \end{array}$ | $\begin{array}{c} 45 \\ 35 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 3 \\ \mathbf{68} \end{array}$ | $\begin{array}{c} \mathbf{65} \\ 35 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 32 \\ 64 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 70 \\ 38 \text{ } \mathbf{M} \text{ } 12 \\ \mathbf{85} \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} 3 \\ 75 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 0 \\ 7 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 87 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 0 \\ 20 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 1 \\ 13 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 0 \\ 4 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 14 \text{ } \mathbf{F0} \text{ } 0 \\ \mathbf{30} \end{array}$ |
| $\begin{array}{c} 0 \\ 99 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 0 \\ 2 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 99 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 0 \\ 5 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 5 \\ 84 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 0 \\ 0 \end{array}$ | $\begin{array}{c} 0 \\ 70 \text{ } \mathbf{F2} \text{ } 0 \\ 11 \end{array}$ |

table 13. « La petite maison au bord de la rivière. »

L'argument est le petit objet rectangulaire (la maison), le référent est l'objet longiligne (la rivière).



0
13 **B** 0
87

0
25 **K** 6
69

1
28 **M** 18
73

0
27 **F0** 0
95

0
23 **F2** 0
97

0
47 **B** 0
53

0
47 **K** 1
52

0
48 **M** 9
52

0
55 **F0** 0
76

0
29 **F2** 0
95

0
88 **B** 0
12

0
69 **K** 5
31

0
78 **M** 34
22

0
51 **F0** 0
66

0
25 **F2** 0
95

table 14. « Les relations internationales. »

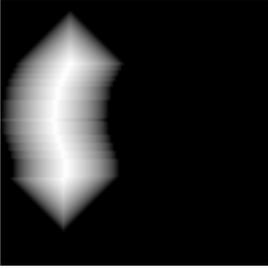
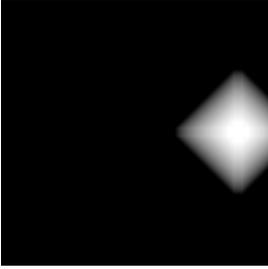
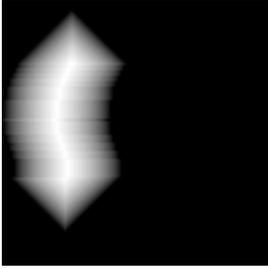
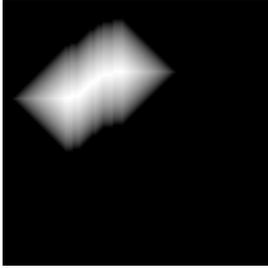
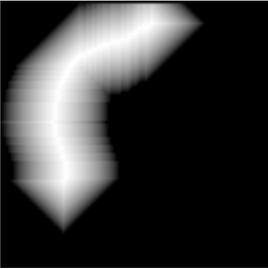
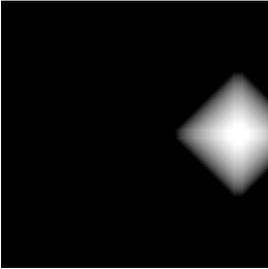
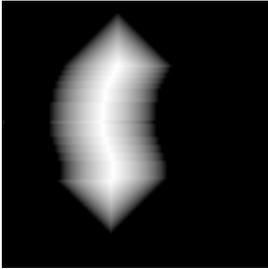
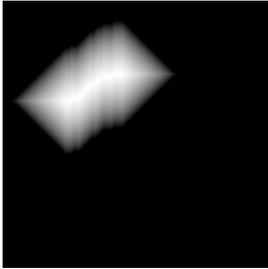
| | | | |
|---|---|--|---|
|  |  |  |  |
| 0 100 B 0 0 | 2 98 B 0 0 | 0 35 B 0 65 | 0 0 B 7 93 |
| 10 84 K 0 6 | 23 73 K 0 4 | 12 46 K 4 39 | 13 36 K 8 43 |
| 10 90 M 0 7 | 27 73 M 0 7 | 36 49 M 22 51 | 41 43 M 26 57 |
| 4 99 F0 0 0 | 14 98 F0 0 0 | 0 26 F0 0 17 | 0 0 F0 16 23 |
| 3 100 F2 0 0 | 19 95 F2 0 5 | 0 26 F2 0 17 | 0 0 F2 16 23 |
|  |  |  |  |

table 15. Objets flous.

Chaque exemple est constitué de deux images (une par objet flou) :
le référent est l'objet représenté par l'image de droite.

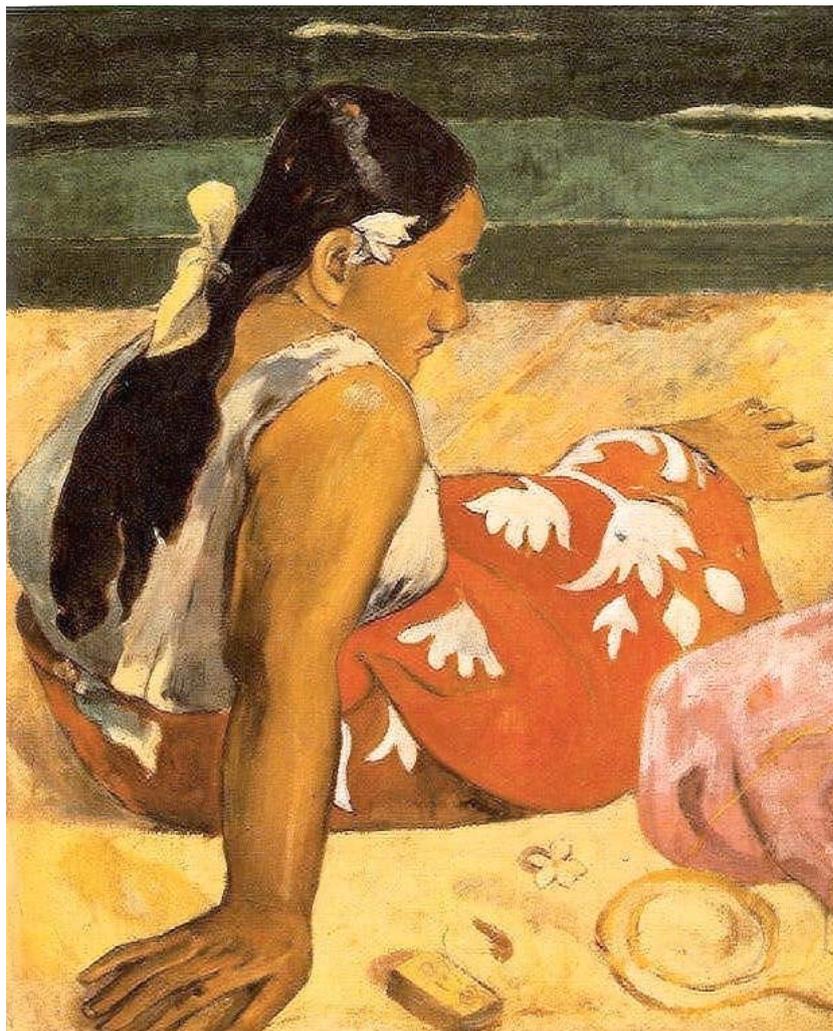
This table is not available.
Sorry for the inconvenience.

This table is not available.
Sorry for the inconvenience.

CHAPITRE III

évaluation et comparaison de partitions

en classification d'images



1. Introduction

Ce chapitre constitue une réflexion sur le thème de l'évaluation et de la comparaison de partitions dans le domaine de la classification d'images satellites. Évaluer la partition produite par une classification supervisée en la comparant avec une partition de contrôle définie par un photo-interprète est un problème typique. On se contente actuellement d'évaluer — et donc de comparer — des partitions nettes. Même si celles-ci sont issues de partitions floues. La littérature est relativement fournie là-dessus ([Gong90](#), [Cong91](#), [Zhua95](#), [MaRe95...](#)). Le problème de l'évaluation d'une partition floue, de la comparaison de deux partitions floues, a par contre été rarement abordé. Remarquons qu'« évaluer une partition » ne signifie pas ici « estimer la validité d'une partition », comme cela est nécessaire lors d'une segmentation floue non supervisée ([Jain88](#), [Kris93b...](#)) : évaluation doit se comprendre en termes de comparaison entre données calculées et données attendues. [Deer96](#) est le seul article dans lequel nous ayons trouvé des réflexions sur le sujet, à défaut de propositions concrètes. Les auteurs suggèrent notamment de fonder l'évaluation d'une partition floue sur sa comparaison avec une partition de contrôle floue. Pour le tracé de parcelles de contrôle, le thématicien se focalise traditionnellement, et spontanément, sur les zones homogènes de l'image : envisager de constituer des partitions de contrôle floues nécessite évidemment de redéfinir et complexifier sa tâche. Quoi qu'il en soit, devoir systématiquement ramener l'évaluation et la comparaison de partitions floues à celles de partitions nettes, par "défuzzification", est loin d'être satisfaisant. La somme des informations quantitatives recélées dans une partition floue est incomparablement supérieure à la somme des informations purement qualitatives recélées dans une partition nette. L'analyse de frontières ([Andr97](#)), l'analyse de mixels ([Food94](#)), le repérage de zones à haut risque de confusion, la levée d'ambiguïtés par l'exploitation de connaissances d'experts — et notamment de connaissances structurelles — sont autant de tâches que seule l'étude d'une partition floue peut permettre d'accomplir. Et autant d'invitations à développer des outils permettant d'évaluer et comparer directement les partitions de ce type.

Partitions nettes, partitions floues, partitions possibilistes... Ces termes recouvrent différentes entités mathématiques, et leur définition n'est pas toujours très arrêtée. Nous discutons sur ce point dans le paragraphe §2. En traitement d'images, la notion de partition est fortement liée à celle de "clustering" (que nous traduirons ici par « segmentation »). Nous décrivons dans le paragraphe §3 le principe d'algorithmes itératifs de segmentation tels que ceux de type HCM ("Hard C-Means" [Cove67](#)), FCM ("Fuzzy C-Means" [Bez81](#)) et PCM ("Possibilistic C-Means" [Kris93a](#)). Nous décrivons en particulier les algorithmes qui sont à l'origine des deux partitions floues considérées pour illustrer notre étude. Données images et données expertes nous ont été communiquées par le *Laboratoire de Géosciences Marines et Télédétection* de l'*Université Française du Pacifique*. Elles concernent un atoll de l'Archipel des Tuamotu, en Polynésie Française. Enfin, dans le paragraphe §4, nous nous attachons à décrire le matériau sur lequel, suivant la nature des variables mises en jeu (binaires, qualitatives, ordinales ou quantitatives), doit ou peut s'appuyer la comparaison de deux partitions. Nous proposons notamment de comparer deux partitions floues par l'intermédiaire de ce que nous appelons leurs fermetures plausibilistes.

2. Partitions nettes et partitions floues

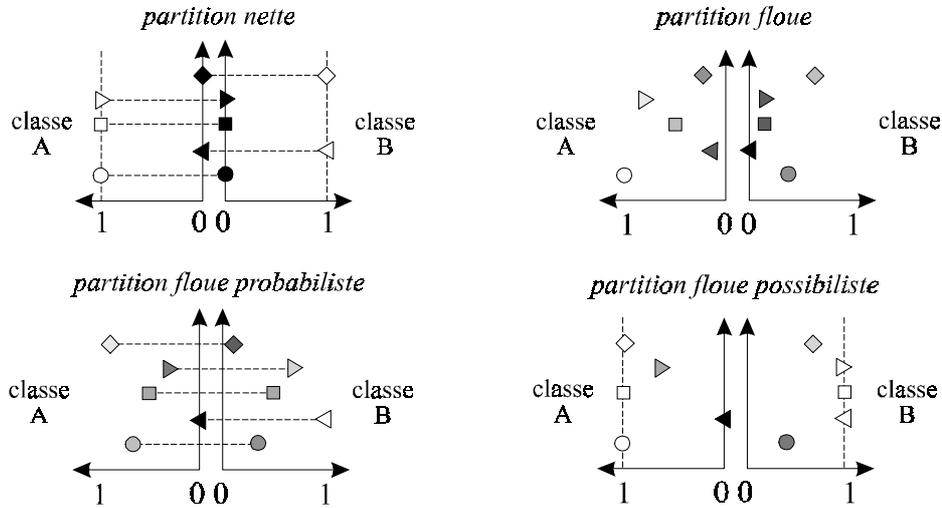


figure 1. 2-partitions d'un ensemble E de cinq éléments : $E = \{\diamond, \triangleright, \square, \triangleleft, \circ\}$

E est représenté verticalement, les degrés d'appartenance μ_{ij} horizontalement.

Les traits discontinus horizontaux symbolisent la contrainte : $\sum_i \mu_{ij} = 1$

Les traits discontinus verticaux symbolisent la contrainte : $\max_i \mu_{ij} = 1$

Selon les définitions adoptées, une partition nette est une partition floue à la fois probabiliste et possibiliste.

2.1. Partitions nettes

Définition 1.

Soit C un entier naturel non nul, E un ensemble fini non vide.

Une C -partition de E est un ensemble P de parties de E tel que :

$$\bigcup_{X \in P} X = E \quad (1a)$$

$$\forall X \in P, X \neq \emptyset \quad (1b)$$

$$\forall X \in P, \forall Y \in P, X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset \quad (1c)$$

C'est la définition mathématique classique d'une partition : P recouvre E (1a), tout élément de P participe (1b) et est même nécessaire (1c) à ce recouvrement. Une *segmentation* (ici dans le sens du terme anglais "*clustering*") est un processus dont l'objectif est la génération d'une telle partition. Typiquement, à chaque élément de E est associé un vecteur d'un espace euclidien donné ; l'*espace des caractéristiques*. Segmenter E c'est grouper ses éléments d'après la similarité des vecteurs qui leur sont associés. Les groupements obtenus sont des *segments* (ou "*clusters*").

On peut aussi chercher à grouper les éléments de E d'après la similarité de leurs vecteurs, non plus entre eux, mais avec C vecteurs donnés. Il ne s'agit plus alors de segmentation mais de *classification*. Les groupements obtenus sont des *classes*. Le vecteur auquel une classe donnée doit son origine est le *prototype* de la classe. A l'issue d'une classification, on désire généralement rattacher chaque classe à son prototype. Ce qui amène à modifier légèrement la définition première d'une partition.

Définition 2.

Soit C un entier naturel non nul, E un ensemble fini non vide. Une C -partition de E , ou partition en C classes de E , est un C -uplet $(E_i)_{i \in 1..C}$ de parties de E tel que (2a), (2b) et (2c). Le i ème terme de la partition est la *classe* i .

$$\bigcup_{i \in 1..C} E_i = E \quad (2a)$$

$$\forall i \in 1..C, E_i \neq \emptyset \quad (2b)$$

$$\forall i \in 1..C, \forall j \in 1..C, i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset \quad (2c)$$

Une classification est donc un processus dont l'objectif est la génération d'une telle partition. Avant de lancer le processus, les prototypes sont numérotés de 1 à C : à l'issue du processus, le prototype (numéro) i sera celui de la classe i . Quitte à ordonner arbitrairement les segments obtenus, on peut bien entendu considérer que le produit d'une segmentation est aussi une partition au sens de la définition 2.

2.2. Partitions floues

*Jamais il n'y eut une telle possibilité de connaissance
et une telle probabilité d'obscurantisme.*

Ryback

Une partition telle que définie au paragraphe précédent ne peut correspondre le plus souvent qu'à une vision grossière de la réalité. Ses propriétés s'opposent par exemple au fait qu'un pixel d'une image satellite puisse représenter une zone occupée par deux classes de végétation (*mixel*). Ou qu'il puisse ne pas exister de frontière nette entre deux classes de végétation. La notion de *partition floue* est plus adaptée à la réalité.

N et C désignent désormais deux entiers naturels non nuls, E un ensemble de N éléments assimilé à un N -uplet $(e_j)_{j \in 1..N}$ (autrement dit, les éléments de E sont numérotés de 1 à N). Nous proposons la définition suivante.

Définition 3.

Une C -partition floue de E , ou partition floue en C classes de E , est un C -uplet $(\mu_i)_{i \in 1..C}$ d'applications de E vers $[0,1]$ tel que :

$$\forall j \in 1..N, \exists i \in 1..C / \mu_{ij} \neq 0 \quad (3a)$$

$$\forall i \in 1..C, \exists j \in 1..N / \mu_{ij} \neq 0 \quad (3b)$$

μ_{ij} , l'image de l'élément e_j de E par la fonction μ_i , est le *degré d'appartenance* de e_j à la classe i . μ_i est une *fonction d'appartenance* à E ; celle rattachée à la classe i . μ_i définit un sous-ensemble flou E_i de E (Zade65). Si toutes les fonctions μ_i prennent leurs valeurs dans $\{0,1\}$, les E_i sont des sous-ensembles nets de E et (3a) et (3b) peuvent respectivement se récrire (2a) et (2b). La notion de partition floue généralise donc celle de partition telle que nous l'avons vue jusque-là. Nous parlerons désormais de partitions floues et de partitions nettes, de segmentations et classifications floues (processus dont l'objectif est la génération de partitions floues) et de segmentations et classifications nettes.

2.2.1. Partitions floues probabilistes

L'idée de développer des méthodes de segmentation floue avait été soumise dès 1969 par Ruspini ([Rusp69](#)). Il donne des partitions floues une définition plus stricte que celle que nous avons proposée. Une partition floue au sens de Ruspini — sens adopté par la plupart des auteurs après lui — est ce que nous conviendrons ici d'appeler une *partition floue probabiliste*.

Définition 4.

La partition floue $(\mu_i)_{i \in 1..C}$ de E est dite *probabiliste* si et seulement si (fig.1) :

$$\forall j \in 1..N, \sum_{i \in 1..C} \mu_{ij} = 1 \quad (4a)$$

Pour tout élément j de $1..N$, l'application p_j de $1..C$ vers $[0,1]$ qui à tout i associe μ_{ij} est alors une distribution de probabilités — ce qui justifie la dénomination choisie. L'on peut donc interpréter μ_{ij} comme la probabilité que l'élément e_j de E appartienne à la classe i . Et l'on peut considérer que cette probabilité reflète dans quelle mesure l'élément e_j représente mieux la classe i que toute autre classe.

Même s'il est théoriquement certain que les éléments de E se répartissent en exactement C classes, on peut s'attendre en pratique à ne disposer que d'un ensemble bruité de données, et donc à ce que certains éléments de E ne puissent raisonnablement être affectés à aucune de ces C classes. Un moyen de répondre à ce problème est d'introduire une $C+1$ -ième classe, chargée de collecter le bruit ([Dave91](#)). Plutôt que d'associer à E une C -partition floue probabiliste, on lui associe alors une $C+1$ -partition. Ce qui amène, en se désintéressant ensuite de la classe « bruit », à considérer des C -partitions floues $(\mu_i)_{i \in 1..C}$ telles que :

$$\forall j \in 1..N, \sum_{i \in 1..C} \mu_{ij} \leq 1 \quad (4b)$$

2.2.2. Partitions floues possibilistes

Soit $(\mu_i)_{i \in 1..C}$ une partition floue probabiliste de E . La probabilité μ_{ij} ne permet pas d'apprécier dans quelle mesure l'élément e_j de E est un *bon* représentant de la classe i . C'est ce qui a conduit Krishnapuram et Keller ([Kris93a](#), [Kris96](#)) à introduire la notion de *partition floue possibiliste*. Nous proposons la définition suivante.

Définition 5.

La partition floue $(\mu_i)_{i \in 1..C}$ de E est dite *possibiliste* si et seulement si (fig.1) :

$$\forall j \in 1..N, \max_{i \in 1..C} \mu_{ij} = 1 \quad (5)$$

Pour tout élément j de $1..N$, l'application π_j de $1..C$ vers $[0,1]$ qui à tout i associe μ_{ij} est alors une distribution de possibilités ([Zade78](#)) — ce qui justifie la dénomination choisie. L'on peut donc interpréter μ_{ij} comme la possibilité que l'élément e_j de E appartienne à la classe i . Et l'on peut considérer que cette possibilité reflète dans quelle mesure l'élément e_j est un bon représentant de la classe i .

Au problème posé par le bruit il peut être répondu de la même manière que précédemment (§2.2.1). On est alors amené à considérer des C -partitions floues $(\mu_i)_{i \in 1..C}$ telles que : $\forall j \in 1..N, \max_{i \in 1..C} \mu_{ij} \leq 1$. C'est-à-dire des C -partitions floues quelconques. Une partition floue possibiliste au sens de Krishnapuram et Keller (*Kris93a*) coïncide d'ailleurs avec ce que nous avons convenu d'appeler tout simplement une partition floue.

2.3. "Défuzzification" d'une partition floue

À une partition floue, il est fréquent d'associer une partition nette.

Définition 6.

Soit $\mu=(\mu_i)_{i \in 1..C}$ un C -uplet d'applications de E vers $[0,1]$. On dit d'une C -partition nette $v=(v_i)_{i \in 1..C}$ de E que c'est le produit d'une "défuzzification" de μ si et seulement si (fig.2) :

$$\forall i \in 1..C, \forall j \in 1..N, v_{ij} = 1 \Rightarrow \mu_{ij} = \max_{k \in 1..C} \mu_{kj} \tag{6}$$

L'existence d'une telle partition nette v n'est pas assurée, même si μ est une partition floue de E — c'est-à-dire si μ vérifie (3a) et (3b) (définition 3). Elle est par contre assurée si μ remplit la condition (7b). Et si μ possède simultanément les propriétés (7a) et (7b), ce sont l'existence et l'unicité de v qui sont toutes deux garanties.

$$\forall j \in 1..N, \exists i \in 1..C / \mu_{ij} > \max_{k \in 1..C, k \neq i} \mu_{kj} \tag{7a}$$

$$\forall i \in 1..C, \exists j \in 1..N / \mu_{ij} > \max_{k \in 1..C, k \neq i} \mu_{kj} \tag{7b}$$

(7a) implique (3a) et (7b) implique (3b). En fait, la définition 3 peut être qualifiée de définition « faible ». En substituant (7a) et (7b) respectivement à (3a) et (3b), nous obtenons une définition « forte » : à toute C -partition floue une et une seule "défuzzification" peut alors être appliquée. La définition « idéale » d'une partition floue se situe selon nous entre la définition faible, trop permissive, et la définition forte, que (7a) rend trop restrictive.

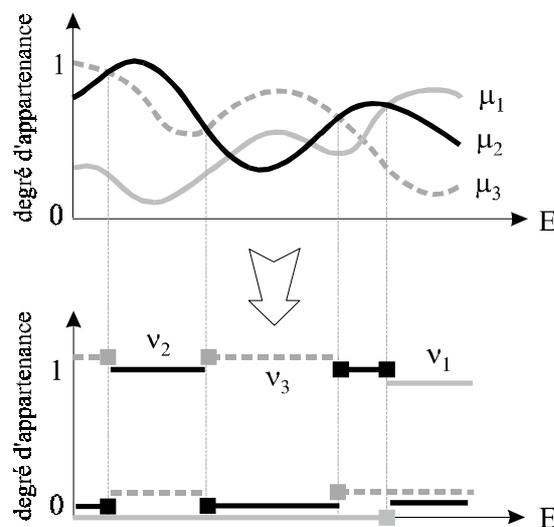


figure 2. "Défuzzification" d'une partition floue.

3. Segmentations fondées sur l'estimation de prototypes

3.1. Principe

Nous décrivons dans cette section le principe d'algorithmes itératifs de segmentation tels que ceux de type HCM ("Hard C-Means", [Cove67](#)), FCM ("Fuzzy C-Means", [Bez81](#)) et PCM ("Possibilistic C-Means", [Kris93a](#)). N et C désignent toujours deux entiers naturels non nuls, E un ensemble de N éléments assimilé à un N -uplet $(e_j)_{j \in 1..N}$.

Les processus de segmentation auxquels nous nous intéressons ici consistent en classifications répétées. L'on se donne tout d'abord un premier C -uplet k^0 de prototypes, par exemple en choisissant chacun d'eux de manière aléatoire. Une première classification peut alors être lancée. De nouveaux prototypes sont ensuite choisis, cette fois en fonction du résultat μ^0 de la classification précédente. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que la partition obtenue soit jugée satisfaisante.

```

u ← 0 ;
μ0 ← F(k0) ; % première classification (§3.1.2, §3.1.5) %
répéter
    u ← u+1 ;
    ku ← G(μu-1) ; % réestimation des prototypes (§3.1.6) %
    μu ← F(ku) ; % nouvelle classification (§3.1.5) %
tant que non A(u) ; % tant que non satisfaisant (§3.1.7) %

```

Les données en entrée du processus de segmentation sont l'ensemble E et le nombre C de segments recherchés. Les données en sortie sont une C -partition floue de E et un C -uplet de prototypes. Le processus même de segmentation est régi par un ensemble de données supplémentaires : nous les présentons ci-après.

3.1.1. L'espace X des caractéristiques et les vecteurs caractéristiques x_j

Il faut se donner un ensemble X appelé espace des caractéristiques, et pour tout j de $1..N$ associer à e_j un élément x_j de X . x_j est le vecteur caractéristique de e_j . Typiquement, X est un espace euclidien \mathbf{R}^n .

3.1.2. Le domaine $K = \times_{i \in 1..C} K_i$ des prototypes et le C -uplet k^0 de prototypes

A chaque classe i , il faut associer un ensemble K_i : le choix d'un prototype i se fera dans K_i . Le domaine K des prototypes est le produit cartésien $\times_{i \in 1..C} K_i$. k^0 est un élément de K : c'est le C -uplet de prototypes qui permet de lancer le processus de segmentation. Typiquement, les K_i sont égaux à l'espace X des caractéristiques.

3.1.3. La famille P de partitions

La partition recherchée le sera dans une partie P de l'ensemble des C -partitions floues de E . Pour les algorithmes de type HCM par exemple, P est l'ensemble des C -partitions nettes de E . Pour ceux de type FCM, c'est l'ensemble des C -partitions floues probabilistes de E . Et pour ceux de type PCM, c'est l'ensemble des C -partitions floues possibilistes.

3.1.4. La fonction objectif J

C'est une application de $P \times K$ vers \mathbf{R}_+ . Elle est chargée de traduire l'idée que l'on se fait d'une bonne partition solution. Plus $J(\mu, k)$ est petit et plus la partition μ est jugée satisfaisante. L'on espère donc de la segmentation qu'elle produise une partition μ^* de P telle que :

$$\exists k^* \in K / J(\mu^*, k^*) = \min_{(\mu, k) \in P \times K} J(\mu, k)$$

En pratique, le couple (μ^f, k^f) obtenu à l'issue de la segmentation ne correspond le plus souvent qu'à un minimum local de J .

J est généralement définie par l'intermédiaire d'une application d de $X \times \bigcup_{i \in 1..C} K_i$ vers \mathbf{R}_+ . $J(\mu, k)$, avec $\mu = (\mu_i)_{i \in 1..C}$ et $k = (k_i)_{i \in 1..C}$, s'exprime alors comme une fonction des μ_{ij} et des $d(x_j, k_i)$. $d(x_j, k_i)$ mesure l'adéquation du vecteur caractéristique x_j avec le prototype k_i , l'adéquation étant d'autant meilleure que $d(x_j, k_i)$ est petit. Typiquement (algorithmes FCM) : $J(\mu, k) = \sum_{i \in 1..C} \sum_{j \in 1..N} \mu_{ij}^2 d^2(x_j, k_i)$. Si X et les K_i sont l'espace \mathbf{R}^n , d peut être tout simplement la distance euclidienne.

3.1.5. La fonction de partition F

C'est une application de K vers P . On s'efforce de la définir de telle manière que :

$$\forall k \in K, J(F(k), k) = \min_{\mu \in P} J(\mu, k)$$

Pour faire correspondre une partition $F(k)$ à un C -uplet k de prototypes, l'on considère donc la fonction de P vers \mathbf{R}_+ qui à toute partition μ associe $J(\mu, k)$, et l'on recherche en quels points cette fonction admet un minimum.

Supposons J définie par l'intermédiaire d'une « distance » d , comme nous l'avons indiqué §3.1.4. Si P est l'ensemble des C -partitions floues probabilistes de E , alors se donner F c'est estimer des probabilités (les μ_{ij}) à partir de distances (les $d(x_j, k_i)$). Et si P est l'ensemble des C -partitions floues possibilistes de E , c'est estimer des possibilités à partir de distances.

3.1.6. La fonction de calcul de prototypes G

C'est une application de P vers K . On s'efforce de la définir de telle manière que :

$$\forall \mu \in P, J(\mu, G(\mu)) = \min_{k \in K} J(\mu, k)$$

Pour faire correspondre un C -uplet $G(\mu)$ de prototypes à une partition μ , l'on considère donc la fonction de K vers \mathbf{R}_+ qui à tout C -uplet k associe $J(\mu, k)$, et l'on recherche en quels points cette fonction admet un minimum.

3.1.7. La fonction d'arrêt A

C'est une application de \mathbf{N}^* vers $\{0,1\}$. Elle est chargée de mettre fin au processus de segmentation. Soit k^{u-1} le C-uplet de prototypes sur lequel s'est appuyée la u-ième classification lancée au cours du processus, et soit μ^{u-1} la partition produite. Typiquement, $A(u)$ vaut 1 (arrêt) si $\max_{i \in 1..C, j \in 1..N} |\mu_{ij}^u - \mu_{ij}^{u-1}|$ est inférieur à une valeur donnée, et vaut 0 sinon.

3.1.8. Remarques

□

Dans la mesure où le nombre C de classes est supposé connu, les algorithmes décrits dans cette section §3 sont des algorithmes de *segmentation supervisée*. Les algorithmes de *segmentation non supervisée* font appel à des mesures de validité — soit globales (évaluation de partitions), soit individuelles (évaluation de segments) — de manière à déterminer la valeur « optimale » de C (📖 Jain88, 📖 Kris93b).

□

Une classification peut être vue comme une segmentation au cours de laquelle le C-uplet k^0 de prototypes n'est pas remis en question — parce que jugé suffisamment proche du C-uplet optimal k^* . Il ne s'agit plus alors que d'exécuter : $\mu^0 \leftarrow F(k^0)$. Et les données G et A n'ont pas lieu d'être.

3.2. Exemples

Deux partitions sont considérées pour illustrer cette étude. Elles concernent un même ensemble E de N=160341 pixels d'une image multispectrale SPOT XS (table 3). Nous décrivons ici, en les inscrivant dans le cadre présenté §3.1, les algorithmes qui sont à l'origine de ces partitions. Ce sont des algorithmes de classification floue supervisée. L'espace X des caractéristiques est l'espace (XS1, XS2, XS3) des radiométries, soit \mathbf{R}^3 . Les classes recherchées sont au nombre de C=13 (tables 1 et 2) : il s'agit de décrire la morphologie de la couronne récifale de Tikehau (atoll de Polynésie Française). Chaque prototype k_i^0 est calculé à partir d'un sous-ensemble E_i^a de E (*parcelles d'apprentissage* de la classe i). À chaque algorithme correspond un domaine de prototypes, mais les parcelles d'apprentissage utilisées sont les mêmes (table 4). La fonction objectif J est définie par l'intermédiaire d'une application d de $X \times \cup_{i \in 1..C} K_i$ vers \mathbf{R}_+ .

Soit c une matrice 3×3 sur \mathbf{R} , symétrique et définie positive. Nous notons d_c la *distance de Mahalanobis* définie par c sur \mathbf{R}^3 , et \bar{d}_c la distance normalisée associée (📖 Bezd92) :

$$\forall v_1 \in \mathbf{R}^3, \forall v_2 \in \mathbf{R}^3, d_c^2(v_1, v_2) = (v_2 - v_1)^t \cdot c^{-1} \cdot (v_2 - v_1)$$

$$\forall v_1 \in \mathbf{R}^3, \forall v_2 \in \mathbf{R}^3, \bar{d}_c^2(v_1, v_2) = |c|^{1/3} \cdot d_c^2(v_1, v_2)$$

$(v_2 - v_1)^t$ désigne la transposée du vecteur colonne $v_2 - v_1$ et $|c|$ le déterminant de c.

3.2.1. Algorithme FGG (“Fuzzy Gath and Geva algorithm”)

Il dérive d’un algorithme de segmentation proposé par Gath et Geva ([Gath89](#)). P est l’ensemble des C -partitions floues probabilistes de E . Pour tout élément i de $1..C$, K_i est l’ensemble des triplets (v,c,p) , où v décrit l’ensemble \mathbf{R}^3 de vecteurs colonnes, c l’ensemble des matrices 3×3 sur \mathbf{R} qui sont symétriques et définies positives, p l’ensemble des réels strictement positifs. Chaque prototype k_i^0 consiste donc en un triplet (v_i^0, c_i^0, p_i^0) : v_i^0 est le vecteur radiométrique moyen associé aux éléments de E_i^a , c_i^0 la matrice de covariance. p_i^0 correspond, à un facteur multiplicatif près, à la probabilité a priori de la classe i . Les p_i^0 ont été choisis égaux (équiprobabilité a priori). La fonction objectif J est telle que pour tout couple (μ, k) de $P \times K$, avec $\mu = (\mu_i)_{i \in 1..C}$ et $k = (k_i)_{i \in 1..C}$:

$$J(\mu, k) = \sum_{i \in 1..C} \sum_{j \in 1..N} \mu_{ij}^2 d^2(x_j, k_i) \quad (8)$$

d est définie de la façon suivante :

$$\forall x \in X, \forall (v, c, p) \in \cup_{i \in 1..C} K_i, d^2(x, (v, c, p)) = \frac{\sqrt{|c|}}{p} \cdot \exp[d_c^2(x, v)/2]$$

Le lieu des points x équidistants du prototype (v, c, p) est un ellipsoïde. Les directions principales de cet ellipsoïde sont données par les vecteurs propres de la matrice c^{-1} . La fonction F de partition est pleinement déterminée par les choix précédents. Soit $k = (k_i)_{i \in 1..C}$ un élément de K , avec $k_i = (v_i, c_i, p_i)$, et soit $\mu = (\mu_i)_{i \in 1..C}$ la partition floue probabiliste $F(k)$: μ_{ij} est la probabilité que e_j appartienne à la classe i , sachant que chaque classe i est caractérisée par la fonction de densité normale $\mathcal{N}(v_i, c_i)$ et admet $p_i / \sum_{k \in 1..C} p_k$ comme probabilité a priori. La table 6 représente le produit d’une “défuzzification” de la C -partition floue probabiliste $\mu^0 = F(k^0)$.

3.2.2. Algorithme PGK (“Possibilistic Gustafson and Kessel algorithm”)

Il dérive de l’algorithme de segmentation floue possibiliste de Gustafson et Kessel ([Gust79](#), [Kris93a](#)). P est l’ensemble des $C+1$ -partitions floues possibilistes de E , la classe $C+1$ étant la classe bruit. Pour tout élément i de $1..C$, K_i est l’ensemble des couples (v, c) , où v décrit l’ensemble \mathbf{R}^3 de vecteurs colonnes et c l’ensemble des matrices 3×3 sur \mathbf{R} qui sont symétriques et définies positives. Chaque prototype k_i^0 consiste donc en un couple (v_i^0, c_i^0) : v_i^0 est le vecteur radiométrique moyen associé aux éléments de E_i^a et c_i^0 la matrice de covariance. La fonction objectif J est telle que pour tout couple (μ, k) de $P \times K$, avec $\mu = (\mu_i)_{i \in 1..C+1}$ et $k = (k_i)_{i \in 1..C+1}$:

$$J(\mu, k) = \sum_{i \in 1..C+1} \sum_{j \in 1..N} [\mu_{ij}^2 d^2(x_j, k_i) + \eta_i (1 - \mu_{ij})^2] \quad (9)$$

Les η_i désignent des réels strictement positifs. d et ces réels sont définis de la façon suivante :

$$\forall x \in X, \forall (v, c) \in \cup_{i \in 1..C} K_i, d(x, (v, c)) = \bar{d}_c(x, v) \quad (10a)$$

$$\forall x \in X, \forall k \in K_{C+1}, d(x, k) = 0 \quad (10b)$$

$$\forall i \in 1..C, \eta_i = |c_i^0|^{1/3}$$

D’après (10a), le lieu des points x équidistants du prototype (v, c) est un ellipsoïde. Les directions principales de cet ellipsoïde sont données par les vecteurs propres de la matrice c^{-1} . K_{C+1} et η_{C+1} ne sont pas précisément définis. Mais d’après (10b), où qu’en soit le processus de segmentation et quel que soit l’élément de E considéré, le fait que cet élément puisse appartenir à la classe bruit est jugé tout à fait possible. (10b) montre comment, en considérant explicitement une classe bruit particulière, l’on peut représenter une C -partition floue possibiliste au sens de Krishnapuram et Keller par une $C+1$ -partition floue possibiliste au sens où nous l’entendons

(§2.2.2). La fonction F de partition est pleinement déterminée par les choix précédents. Soit $k=(k_i)_{i \in 1..C+1}$ un élément de K , avec $k_i=(v_i, c_i)$ pour tout i de $1..C$, et soit $\mu=(\mu_i)_{i \in 1..C+1}$ la partition floue possibiliste $F(k)$. Nous avons tout simplement :

$$\forall i \in 1..C, \forall j \in 1..N, \mu_{ij} = 1/[1+d_{c_i}^2(x_j, v_i)] \quad (11)$$

La table 7 représente le produit d'une "défuzzification" de la C -partition floue $(\mu_i^0)_{i \in 1..C}$.

3.2.3. Remarque

Dans l'expression de la fonction objectif (8) (9), l'exposant de μ_{ij} est le "fuzzifier". De manière générale, ce peut être n'importe quel réel supérieur ou égal à 1 ([Bezdek81](#)). Le prendre égal à 1 conduit à l'obtention de partitions nettes. Dans (8) et (9), nous l'avons implicitement fixé à 2, valeur habituellement adoptée quand il s'agit d'opérer une segmentation floue. Les résultats d'une étude expérimentale menée par Pal et Bezdek ([PalB95](#)) valident d'ailleurs ce choix.

4. Évaluation et comparaison de partitions

Dans toute cette section, N et C désignent deux entiers tels que $N \geq C \geq 2$ et E désigne un ensemble de N éléments assimilé à un N -uplet $(e_j)_{j \in 1..N}$. Typiquement, E est une image satellite (par exemple de type SPOT XS) et les e_j sont donc des pixels.

4.1. Introduction

Soit $\mu=(E_i)_{i \in 1..C}$ une C -partition nette de l'image satellite E . « Évaluer μ » consiste habituellement à la comparer avec une C -partition nette ν , appelée *partition de contrôle*. Dans le domaine de la classification d'images satellites, la comparaison de deux partitions s'effectue typiquement à cette occasion. Nous commençons donc notre étude dans ce contexte. Fondamentalement, ν est définie « manuellement », à la suite d'expéditions sur le terrain. Pour des raisons matérielles évidentes, ce n'est une C -partition que d'une partie E^c de E : $\nu=(E_i^c)_{i \in 1..C}$. La plupart du temps, le cardinal de E^c est d'ailleurs très inférieur à celui de E (confronter par exemple les tables 5 et 6). L'évaluation de μ est donc ramenée à celle de la partition de E^c induite par μ . Chaque classe i de ν constitue pour μ ce qu'on appelle l'ensemble des *parcelles de contrôle* de la classe i . D'un point de vue général, comparer μ et ν consiste à mesurer la dépendance de deux variables. Ces variables peuvent être, par ordre de complexité croissante : binaires, qualitatives, ordinales (semi-quantitatives) ou quantitatives. Nous examinons ces différents cas dans les paragraphes §4.2 à §4.5. Les tests statistiques cités sont très classiques, bien connus notamment des biostatisticiens, et nous ne nous y attardons pas. Le lecteur pourra trouver tous les détails concernant ces tests dans les références proposées. Nous nous attachons surtout à décrire le matériau sur lequel, suivant la nature des variables mises en jeu, doit ou peut s'appuyer la comparaison de partitions. Dans le paragraphe §4.5, où il est question de variables quantitatives, nous proposons notamment de comparer deux partitions floues par l'intermédiaire de ce que nous appelons leurs fermetures plausibilistes.

4.2. Considération d'informations binaires

4.2.1. Confusions présumées et confusions constatées

L'expert thématique chargé de classer en C classes l'image satellite E sait qu'il est susceptible de commettre certaines confusions. Il peut exprimer les confusions présumées par l'intermédiaire d'une matrice à valeurs binaires de taille $C \times C$. Il peut aussi se demander quelles confusions il serait susceptible de commettre s'il ne disposait que de l'information radiométrique (autrement dit, s'il ne percevait l'image qu'au niveau du pixel, comme les algorithmes FGK et PGK). Bien entendu, le nombre de confusions présumées est alors beaucoup plus important. La confrontation d'une C -partition nette μ de E avec une partition de contrôle permet d'autre part de constater certaines confusions. Elles aussi peuvent être consignées dans une matrice. La comparaison de cette matrice avec l'une ou l'autre de celles définies par le photo-interprète constitue un premier moyen d'évaluer μ . De manière générale, la relation entre deux séries de données binaires est décrite par un tableau de contingence 2×2 . Sont indiqués dans ce tableau les effectifs des occurrences conjointes des variables « confusion présumée » et « confusion constatée ».

| | | confusion présumée | | total |
|---------------------|-----|--------------------|-----|-------|
| | | non | oui | |
| confusion constatée | non | x | y | x+y |
| | oui | z | t | z+t |
| total | | x+z | y+t | C^2 |

L'analyse du tableau se fait par l'intermédiaire d'une mesure de corrélation de point ou d'association (Lege84, Sche84). La mesure d'association la plus répandue est celle définie par :

$$\Phi = \frac{xt - yz}{\sqrt{(x+y)(x+z)(z+t)(y+t)}}$$

-1 exprime l'exclusion parfaite des deux variables, 0 l'indépendance totale, 1 l'association parfaite. Φ est testable en comparant la valeur $C^2 \times \Phi^2$ avec la distribution du $\chi^2_\alpha(\delta)$, où α est le risque associé à la décision du test et δ le degré de liberté, soit 1 ici (puisque la dimension du tableau de contingence est 2). Cependant, dans le cadre de notre étude, faire appel à une mesure d'association classique telle que Φ n'est pas vraiment approprié. Considérons les faits ① à ④ définis de la façon suivante :

| | | confusion présumée | |
|---------------------|-----|--------------------|--------|
| | | non | oui |
| confusion constatée | non | fait ① | fait ② |
| | oui | fait ③ | fait ④ |

Le fait ③ (« une confusion est constatée alors qu'elle n'était pas présumée ») ne peut être jugé que très négativement. Il tire d'ailleurs Φ vers -1 . Par contre, le fait ② ne peut pas être jugé négativement. Or il tire encore Φ vers -1 . Autrement dit, plus le photo-interprète est pessimiste et plus les partitions sont jugées mauvaises. Notons encore que le fait ④ tire Φ vers 1 : contre toute logique, il est donc mieux perçu que le fait ②.

4.2.2. Examen des tables 8 et 9

Les partitions floues utilisées pour illustrer cette étude ont été “défuzzifiées” (§2.3). La confrontation de la partition de contrôle (table 5) avec les partitions nettes obtenues (tables 6 et 7) a permis de dresser deux matrices à valeurs binaires (table 9). De son côté, l’expert a également dressé deux matrices (table 8). Par exemple, il n’écarte pas le fait qu’il puisse affecter des pixels de la classe 2 (platier immergé) à la classe 4 (hoa) : dans la matrice supérieure de la table 8, on trouve un **1** à l’intersection de la colonne 2 et de la ligne 4. L’expert n’écarte pas non plus le fait qu’un classifieur puisse affecter des pixels de la classe 2 à la classe 13 (banc de sable) : le **1** à l’intersection de la colonne 2 et de la ligne 13 de la matrice inférieure en témoigne. Une telle confusion a effectivement été décelée dans la partition PGK (table 9, matrice inférieure). Mais pas dans la partition FGG. Notons que l’expert lui-même ne pense pas pouvoir confondre les classes 2 et 13.

Quatre tableaux de contingence décrivent les relations entre les différentes séries binaires (table 9). On relève un grand pessimisme de l’expert quant aux possibilités d’un classifieur (il y a beaucoup plus de confusions présumées que de confusions constatées). Ceci dit, on décèle exactement autant de confusions dans la partition FGG que dans la partition PGK : 37. À 5 ou 6 cas près, ces confusions étaient présumées par l’expert (tableaux de droite). Si les classifieurs prétendaient réellement rivaliser avec l’expert, les confusions constatées seraient dans l’ensemble beaucoup moins justifiables (tableaux de gauche). Ajoutons pour conclure, mais cela semble évident, que rien ne permet vraiment de préférer une partition à l’autre.

4.3. Considération d’informations qualitatives

4.3.1. Classes calculées et classes observées

Soit $\mu=(E_i)_{i \in 1..C}$ une C -partition nette de l’image satellite E . Dans la très grande majorité des cas, évaluer μ consiste à la comparer avec une partition de contrôle $\nu=(E_i^c)_{i \in 1..C}$ en dressant le tableau de contingence de dimension $C \times C$ défini par :

$$\forall k \in 1..C, \forall i \in 1..C, m_{ki} = |E_k \cap E_i^c|$$

L’analyse d’un tel tableau repose classiquement sur un test du χ^2 (Sapo90). Fondamentalement, il s’agit donc de déterminer dans quelle mesure on peut être certain de l’indépendance des variables qualitatives considérées. Or les variables « classe calculée » (μ) et « classe observée » (ν) sont toujours très fortement dépendantes (ou alors il faut se poser des questions sur l’algorithme de classification) et quantité de valeurs nulles se retrouvent dans le tableau de contingence. C’est pourquoi le χ^2 est rarement utilisé dans le domaine de la classification d’images. On lui préfère généralement le coefficient Kappa (Cong91). On parle aussi plus volontiers de *matrice de confusion* que de tableau de contingence. Le calcul du Kappa, comme celui du χ^2 , met en jeu l’ensemble des effectifs partiels (les m_{ki}). D’autres coefficients apparaissent fréquemment dans la littérature. L’indice OA — “Overall Accuracy” (ou “percentage agreement”) — est le pourcentage des pixels de contrôle qui ont été bien classés. L’indice PA d’une classe i — “Producer’s Accuracy” (Stor86) — est le pourcentage des pixels de con-

trôle de la classe i qui ont effectivement été affectés à la classe i . L'indice UA d'une classe i — "User's Accuracy" — est le pourcentage des pixels de contrôle affectés à la classe i qui sont effectivement de la classe i . Une classe n'ayant pas tendance à être absorbée par d'autres classes a un fort PA. Une classe n'ayant pas tendance à absorber d'autres classes a un fort UA. Les PA et UA moyens correspondent aux indices APA — "Average Producer's Accuracy" — et AUA — "Average User's Accuracy". Alors que les PA et UA sont des indices individuels, OA, APA et AUA sont des indices globaux. Leur interprétation et leur calcul étant particulièrement simples, ils sont couramment utilisés. Mais ils peuvent être sensiblement biaisés par la sur-représentation (OA) ou la sous-représentation (APA et AUA) d'une classe dans la partition de contrôle. De manière générale, l'indice OA a tendance à surestimer la valeur d'une classification, car il ne tient pas compte du fait que même un processus aléatoire permettrait de bien classer certains pixels. Le coefficient Kappa correspond à un réajustement de OA. Foody a d'ailleurs montré que Kappa a tendance à surestimer la part du hasard, et donc à sous-estimer la valeur de la classification (*Food92*). C'est pourquoi Ma et Redmond ont proposé de procéder au réajustement de OA en faisant appel au coefficient Tau (*MaRe95*). Le calcul du Tau s'appuie sur la donnée de probabilités a priori (probabilités a priori d'appartenance d'un pixel aux différentes classes), alors que le calcul du Kappa s'appuie sur l'évaluation de probabilités a posteriori (à partir des m_{ki}). Citons enfin l'indice NOA — "Normalized Overall Accuracy" (*Zhua95*). L'approche est différente. Il s'agit tout d'abord de « concentrer » l'information sur la diagonale de la matrice de confusion en uniformisant par un processus itératif les valeurs marginales. Les indices OA, APA et AUA calculés à partir de la matrice normalisée obtenue sont égaux : ils correspondent à l'indice NOA.

4.3.2. Examen des tables 10 et 11

Les partitions floues utilisées pour illustrer cette étude ont été "défuzzifiées" (§2.3). La confrontation de la partition de contrôle (table 5) avec les partitions nettes obtenues (tables 6 et 7) a permis de dresser deux matrices de confusion. Considérons par exemple la table 10. Le nombre 14 situé à l'intersection de la colonne 2 et de la ligne 4 du tableau supérieur signifie que sur les 178 pixels de contrôle de la classe 2 (hoa), 14 ont été affectés par erreur à la classe 4 (platier immergé). OA vaut $(241+131+\dots+15)/1500$, soit 78.40% : 78.40% des pixels de contrôle ont été bien classés. Le PA associé à la colonne 2 vaut $131/178$, soit 73.60% : 73.60% des pixels de contrôle de la classe 2 ont effectivement été affectés à la classe 2. Le UA associé à la ligne 2 vaut $131/164$, soit 79.88% : 79.88% des pixels de contrôle qui ont été affectés à la classe 2 sont effectivement des pixels de contrôle de la classe 2. APA vaut $(0.8926+0.7360+\dots+0.9375)/13$, soit 80.87%. AUA vaut $(0.8796+0.7988+\dots+0.4545)/13$, soit 76.96%. L'indice NOA (tableau inférieur) vaut $(84.02+79.76+\dots+93.95)/1300$, soit 83.50%. Le calcul de la matrice normalisée et des coefficients Kappa et Tau est évidemment plus complexe. Nous renvoyons le lecteur aux articles cités dans le paragraphe §4.3.1. Généralement, pour le calcul du Tau, c'est l'hypothèse d'équiprobabilité d'appartenance aux classes qui est adoptée. Nous l'avons adoptée aussi. Observons d'autre part qu'avant d'être normalisées, les matrices de confusion sont lissées : ainsi, table 10, tableau médian, on estime que si les effectifs des parcelles de contrôle avaient été cent fois plus importants, sur les 17800 pixels de contrôle de la classe 2 (colonne 2, ligne total), 1406 auraient été affectés par erreur à la classe 4 (colonne 2, ligne 4).

Confrontons maintenant les tables 10 et 11. D'aucuns seraient tentés d'affirmer, en consultant les APA, qu'un classifieur FGG est bien meilleur qu'un classifieur PGK (80.87% contre 70.78%). D'autres, en consultant les OA, qu'un classifieur FGG est légèrement meilleur qu'un classifieur PGK (78.40% contre 76.27%). D'autres encore, en consultant les NOA, soutiendraient le contraire. Avant de se risquer à émettre semblable opinion, il faudrait déjà opérer bon nombre de classifications, en utilisant différents jeux de données. Il faudrait aussi s'interroger sur la manière de définir les parcelles d'apprentissage et de contrôle (*Cong88*, *Gong90*, *Food95*). Les classes sont-elles bien représentées par leurs parcelles d'apprentissage respectives ? Des parcelles d'apprentissage qui sont « optimales » pour un classifieur donné sont-elles encore optimales pour un autre classifieur ? De telles parcelles peuvent-elles vraiment être définies, compte tenu des contraintes matérielles (coût, temps, etc.) ? La confrontation d'une partition nette avec une partition de contrôle fait apparaître certaines confusions : dans quelle mesure ces dernières reflètent-elles les confusions réelles, c'est-à-dire celles qui seraient mises en évidence si tous les pixels pouvaient être contrôlés ? On le voit, comparer deux classifieurs s'avère extrêmement délicat. La question précédente et l'absence de coefficient universel montrent que comparer deux partitions nettes n'est pas non plus tâche aisée. Revenons-en aux tables 10 et 11. On peut déjà émettre quelques réserves sur la partition de contrôle. En particulier, les effectifs de certaines parcelles semblent excessivement faibles (23 pixels seulement pour la classe 3 par exemple ; il est vrai que les mares à kopara sont relativement peu nombreuses et occupent de faibles étendues). Dans l'ensemble, et ceci mis à part, la partition FGG nous paraît légèrement meilleure que la partition PGK. Cette opinion subjective découle d'un examen attentif des deux matrices de confusion. Elle est confortée par l'examen des APA, AUA, OA, Kappa et Tau. On remarquera malgré tout que pour les trois derniers coefficients et indices, les différences observées sont trop faibles pour être significatives (*MaRe95*). Dans la comparaison globale des deux partitions, la prudence est donc de mise. Cela ne nous empêche pas d'avoir quelques certitudes, mais sur des points précis. Il y a incontestablement d'importantes confusions entre les classes 3 et 10 (mares à kopara et conglomérat intertidal). Un fait que le photo-interprète ne semblait pas exclure (table 8, tableau inférieur), même si lui-même ne pense pas pouvoir confondre ces deux classes (table 8, tableau supérieur). Notons d'autre part qu'au cours de la classification PGK la classe 13 a eu largement tendance à absorber les autres classes (UA très faible, de 9.14%).

4.4. Considération d'informations ordinales

4.4.1. *La notion de rang* *Examen de la table 12*

Soit μ et ν deux C-partitions floues de E , chacune étant d'origine quelconque. On peut supposer par exemple que μ est issue d'une segmentation floue probabiliste, ou d'une classification floue possibiliste, ou encore du tracé de parcelles de contrôle par un thématicien. Il nous est interdit de comparer sans autre précaution deux valeurs telles que μ_{ij} et ν_{ij} , pour i et j donnés, puisque ces valeurs ne sont pas forcément de même nature. Il est par contre possible de comparer le rang en e_j de i dans μ , avec le rang en e_j de i dans ν (définition 7).

Définition 7.

Soit μ une C -partition floue de E . À un élément j quelconque de $1..N$, il est toujours possible d'associer une permutation τ de $1..C$ telle que : $\forall k \in 1..C-1, \mu_{\tau(k)j} \geq \mu_{\tau(k+1)j}$. Si plusieurs permutations répondent à ce critère, nous convenons d'en choisir une par tirage aléatoire. L'entier $\tau^{-1}(i)$, pour tout i de $1..C$, est le *rang* en e_j de la classe i dans la partition μ (fig.3).

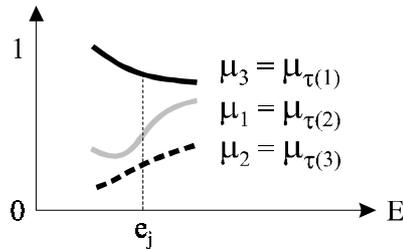


figure 3. Rang dans une partition floue.

Les rangs en e_j des classes 1, 2 et 3 sont respectivement 2, 3 et 1.

Soit e un pixel de E . Si l'on nous demandait d'affecter e à l'une des C classes, on choisirait naturellement d'affecter e à la classe dont le rang en e est 1. Si d'aventure on nous révélait que cette classe n'est pas la bonne, on choisirait alors d'affecter e à la classe dont le rang en e est 2. Et ainsi de suite. La notion de rang permet en quelque sorte de dresser des listes de priorité dans les intentions de classification. Examinons par exemple la colonne 1 du tableau inférieur de la table 12. La partition μ considérée est donc la C -partition floue issue de la classification PGK. Soit e un pixel de contrôle de la classe 1. Dans 89.63% des cas, le rang en e de la classe 1 est 1. Autrement dit, une "défuzzification" de μ conduirait à une bonne classification de e . Dans les autres cas, une "défuzzification" de μ conduirait à mauvaise classification de e . Mais la classe 1 est-elle « loin » dans la liste de priorité associée à e ? Dans 9.26% des cas, elle ne se trouve qu'en deuxième position. Dans tous les autres cas, soit 1.11%, elle se trouve en troisième position. On peut observer que de manière générale, si la classe à laquelle appartient effectivement un pixel n'est pas située en tête de la liste de priorité, alors elle est située en deuxième position. Pour la partition floue issue de la classification FGG, cette règle n'est violée que dans 3.84% des cas (2.29+0.64+0.94). Pour la partition issue de la classification PGK, elle l'est dans 5.71% des cas (4.78+0.85+0.08). Encore une fois, les deux partitions révèlent des caractéristiques très semblables, et il est bien difficile de préférer l'une à l'autre.

4.4.2. La relation d'interdépendance faible

Définition 8.

Soit μ et ν deux C -partitions floues de E . Nous dirons que ces partitions sont *faiblement interdépendantes*, et nous noterons $\mu \cong \nu$, si pour tout élément j de $1..N$ il existe une bijection croissante f_j de $[0,1]$ sur $[0,1]$ telle que : $\forall i \in 1..C, \nu_{ij} = f_j(\mu_{ij})$. La relation d'*interdépendance faible* ainsi définie, \cong , est une relation d'équivalence sur l'ensemble des C -partitions floues de E — ce qui justifie les terminologie et notation adoptées — (fig.4).

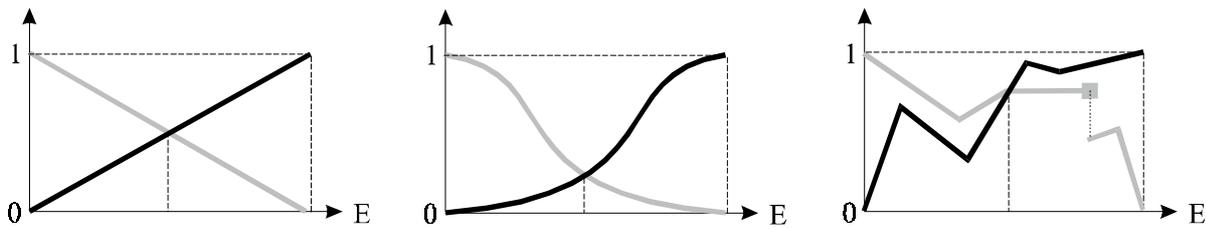


figure 4. Relations d'interdépendance entre partitions floues.

Toutes ces 2-partitions sont faiblement interdépendantes (définition 8).
Les deux premières (à gauche) sont fortement interdépendantes (définition 9).

La notion de rang est évidemment liée à celle d'interdépendance faible. Comparer deux partitions μ et ν sur la base des informations concernant les rangs revient à développer des outils d'évaluation insensibles à la relation d'interdépendance faible. C'est-à-dire des outils qui ne permettront pas de distinguer deux partitions faiblement interdépendantes. Une telle comparaison rentre dans le domaine de l'étude des liaisons entre variables semi-quantitatives — ou variables ordinales — et peut s'opérer en faisant appel aux techniques classiques de corrélation de rang ([Sche84](#)). Signalons simplement ici les trois niveaux d'analyse envisageables.

↪ correspondance globale

Elle peut être mesurée en construisant des histogrammes de corrélation de rang ([Sche84](#), [Sapo90](#)) puis en étudiant la position de leurs modes. Si les partitions sont de même nature (autrement dit, s'il est admis de comparer directement deux valeurs telles que μ_{ij} et ν_{ij}), alors il est possible de construire des histogrammes de corrélation de Pearson.

↪ correspondance des rangs pour une classe i donnée

L'objectif est de savoir si globalement le rang en e_j de i — lorsque j décrit $1..N$ — est similaire dans μ et ν . Autrement dit, il s'agit de savoir si les deux partitions accordent à la classe i le même niveau de reconnaissance. Il nous faut donc comparer des échantillons appariés : on peut faire appel par exemple au test de Wilcoxon ([Sche84](#)).

↪ correspondance des classes pour un rang donné

L'objectif est de savoir si dans μ et ν les classes se partagent de la même manière un rang donné. Dans le cadre de notre étude, une telle analyse n'a d'intérêt que si le rang considéré est faible (comparaison des couches « supérieures » des partitions). Le problème revient en fait à une analyse de données qualitatives fondée sur l'examen d'un tableau de contingence (§4.3).

4.5. Considération d'informations quantitatives

4.5.1. La relation d'interdépendance forte

Les outils d'évaluation insensibles à l'interdépendance faible (§4.4.2) sont évidemment assez grossiers. Afin d'amener la présentation d'outils plus fins, revenons un instant au paragraphe §3. Supposons P égal à l'ensemble des partitions floues possibilistes et la fonction objectif J définie par l'intermédiaire d'une « distance » d . Se donner alors une fonction F de partition,

c'est estimer des possibilités à partir de distances (§3.1.5). Dans le cas de l'algorithme PGK (§3.2.2, (11)), cette estimation peut être représentée par l'égalité symbolique $\mu=1/(1+d^2)$, où d désigne la distance d'un élément de E au prototype d'une classe i , et où μ désigne la possibilité que cet élément soit de la classe i . Selon le choix du "fuzzifier" (§3.2.3) d'autres modèles peuvent être obtenus, en particulier celui proposé par Zimmermann et Zysno sur la base d'études empiriques ([Zimm85](#)) : $\mu=1/(1+d)$. L'objectif de ce paragraphe §4.5 est de définir des méthodes d'évaluation indépendantes du modèle adopté, afin de ne juger une partition que sur ses qualités « intrinsèques ». Quel que soit le modèle choisi, la valeur affectée à μ est d'autant plus grande que d est faible. Plus précisément, on peut admettre qu'il existe une bijection φ de \mathbf{R}_+ sur $[0,1]$, strictement décroissante sur \mathbf{R}_+ , telle que : $\mu=\varphi(d)$. Considérons alors deux partitions floues μ_1 et μ_2 issues de modèles différents : $\mu_1 = \varphi_1(d)$ et $\mu_2 = \varphi_2(d)$. Nous avons : $\mu_2 = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \circ \mu_1$. Il existe donc une bijection croissante f de $[0,1]$ sur $[0,1]$ telle que : $\mu_2 = f \circ \mu_1$. Ce qui nous amène à définir une relation d'*interdépendance forte* entre partitions floues.

Définition 9.

Soit μ et ν deux C -partitions floues de E . Nous dirons que ces partitions sont *fortement interdépendantes*, et nous noterons $\mu \equiv \nu$, s'il existe une bijection croissante f de $[0,1]$ sur $[0,1]$ telle que : $\forall i \in 1..C, \nu_i = f \circ \mu_i$. La relation d'*interdépendance forte* ainsi définie, \equiv , est une relation d'équivalence sur l'ensemble des C -partitions floues de E — ce qui justifie les terminologie et notation adoptées — (fig.4).

Si deux partitions sont fortement interdépendantes, elles le sont aussi faiblement. La réciproque est évidemment fautive. Développer des outils d'évaluation insensibles à la relation d'interdépendance forte, nous fait pénétrer dans le large domaine de l'étude des liaisons entre variables quantitatives. L'approche que nous proposons s'appuie sur la théorie des croyances ([Shaf76](#)).

4.5.2. Plausibilité et crédibilité selon une partition

Soit $\mu=(\mu_i)_{i \in 1..C}$ une C -partition floue de E .

Définition 10.

Considérons un élément j de $1..N$. Il existe au moins une permutation τ de $1..C$ telle que : $\forall k \in 1..C-1, \mu_{\tau(k)j} \geq \mu_{\tau(k+1)j}$. Posons alors, pour tout élément k de $0..C-1$: $\text{niv}_{kj} = \mu_{\tau(k+1)j}$. Ces valeurs niv_{kj} sont indépendantes du choix de τ (si tant est que plusieurs permutations répondent au critère exprimé). Les applications niv_k de E vers $[0,1]$ ainsi définies sont les *couches de niveau* de la partition μ . niv_k est la couche de niveau k (fig.5).

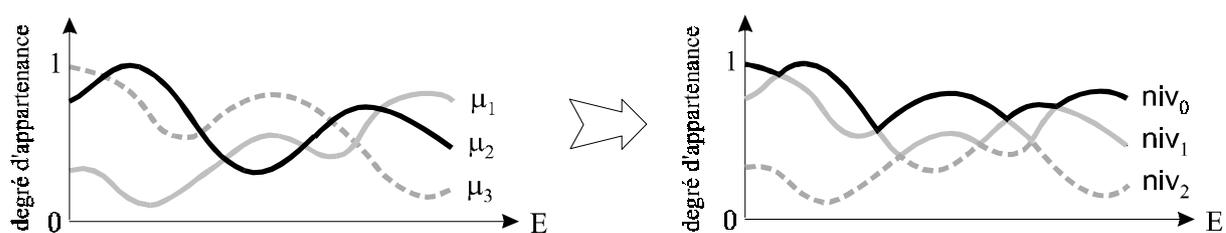


figure 5. Couches de niveau d'une partition floue.

Aux degrés d'appartenance μ_{ij} , degrés dont la nature (probabilité, possibilité...) dépend de la partition considérée, vont être substitués des *degrés de plausibilité* $pl_j(i)$ issus d'une « auto-évaluation » de la partition. L'emploi du terme « plausibilité » sera justifié par la proposition 1. L'auto-évaluation est réalisée en choisissant la couche de niveau 1 comme entité de référence. Car c'est la couche 1 qui, lors d'une "défuzzification", sépare en quelque sorte le bon grain de l'ivraie. Sa proximité avec la couche de niveau 0 est synonyme de conflits, son éloignement de consensus. Enfin, elle rassemble à elle seule la grande majorité des pixels égarés — par cette expression imagée, nous faisons bien sûr référence à l'analyse de la table 12 (§4.4.1). Dans la définition suivante, $f(t)$ représente la proportion des éléments de la couche de niveau 1 situés à une « hauteur » strictement inférieure à t (fig.6).

Définition 11.

Soit niv_1 la couche de niveau 1 de μ et soit f l'application de $[0,1]$ vers $[0,1]$ définie par :

$$\forall t \in [0,1], f(t) = |\{j \in 1..N / niv_{1j} < t\}| / N$$

À tout élément j de $1..N$, on associe deux applications pl_j et cr_j de $1..C$ vers $[0,1]$.

Soit τ l'une des permutations de $1..C$ telle que : $\forall k \in 1..C-1, \mu_{\tau(k)j} \geq \mu_{\tau(k+1)j}$

pl_j et cr_j sont définies par :

$$\forall i \in 1..C, pl_j(i) = f(\mu_{ij})$$

$$cr_j(\tau(1)) = pl_j(\tau(1)) - pl_j(\tau(2)) \text{ et } \forall k \in 2..C, cr_j(\tau(k)) = 0$$

$pl_j(i)$ est la *plausibilité selon* μ que e_j soit de la classe i .

$cr_j(i)$ est la *crédibilité selon* μ que e_j soit de la classe i .

cr_j est bien sûr indépendante du choix de τ .

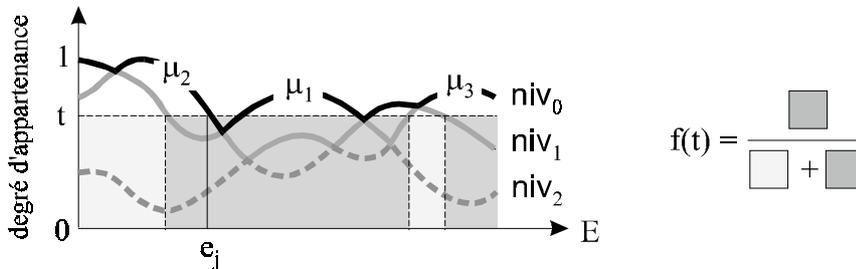


figure 6. Calcul des plausibilités selon une partition. $f(t)$ est la plausibilité selon μ que e_j soit de la classe 2.

Proposition 1.

Soit j un élément de $1..N$. Pour tout i de $1..C$, notons $pl_j(i)$ la plausibilité selon μ que e_j soit de la classe i et $cr_j(i)$ la crédibilité selon μ que e_j soit de la classe i . Il existe une allocation de masse de croyance m_j , définie sur l'ensemble des parties de $1..C+1$, telle que :

$$\forall i \in 1..C, Pl_j(\{i\}) = pl_j(i) \text{ et } Cr_j(\{i\}) = cr_j(i)$$

où Pl_j et Cr_j sont les mesures respectivement de plausibilité et crédibilité associées à m_j .

Définition 12. Proposition 2.

Soit μ^* la C-partition floue de E définie par : $\forall i \in 1..C, \forall j \in 1..N, \mu_{ij}^* = pl_j(i)$
 μ^* est la *fermeture plausibiliste* de μ . Nous avons : $(\mu^*)^* = \mu^*$

En fait, si μ est une partition floue au sens de la définition faible (§2.2, définition 3), μ^* n'en est pas forcément une. Par contre, si μ est une partition floue au sens de la définition forte (évoquée §2.3), μ^* en est également une. Nous adoptons implicitement ici une définition « médiane », « idéale » en ce sens que la fermeture plausibiliste d'une partition floue est encore une partition floue.

Proposition 3.

Soit i un élément de $1..C$, j un élément de $1..N$: $\mu_{ij} = 0 \Rightarrow pl_j(i) = cr_j(i) = 0$
 D'autre part, si μ est nette : $\mu_{ij} = 1 \Rightarrow pl_j(i) = cr_j(i) = 1$

Un corollaire immédiat de cette proposition est que si μ est nette : $\mu^* = \mu$.
 Autrement dit, une partition nette s'admet comme fermeture plausibiliste.

Proposition 4.

Soit μ et ν deux C-partitions floues de E fortement interdépendantes (définition 9).
 Pour tout élément i de $1..C$ et pour tout élément e de E :

- la plausibilité selon μ que e soit de la classe i est égale à
- la plausibilité selon ν que e soit de la classe i ,
- la crédibilité selon μ que e soit de la classe i est égale à
- la crédibilité selon ν que e soit de la classe i .

La notion de fermeture plausibiliste est donc liée à celle d'interdépendance forte. Comparer deux partitions sur la base de leurs fermetures plausibilistes revient à développer des outils d'évaluation insensibles à la relation d'interdépendance forte : c'était bien l'objectif affiché dans le paragraphe §4.5.1.

4.5.3. Examen de la table 13



Considérons le tableau inférieur de la table 13. La partition μ évaluée est donc la C-partition floue issue de la classification PGK. Chaque cellule du tableau contient trois nombres. À l'intersection de la colonne 1 (associée à la classe 1) et de la ligne 1 (associée à la couche de niveau 0) nous trouvons ainsi : 89.63%, 0.94 et 0.33. Interprétons ces trois nombres ainsi que les six autres valeurs indiquées dans la colonne 1.

↪ **champ « % »**

Considérons l'ensemble des pixels e_j de E_1^c (parcelles de contrôle de la classe 1) tels que : $niv_{0j} = \mu_{1j}$. Cet ensemble contient **89.63%** des pixels de E_1^c . Autrement dit, 89.63% des pixels de E_1^c se « retrouvent » dans la couche de niveau 0. Ces pixels sont donc bien classés (plus exactement, une « défuzzification » de μ conduirait à une bonne classification de ces pixels). Les autres non : on en trouve **9.26%** dans la couche de niveau 1 (intersection de la colonne 1 et de la ligne 2) et **1.11%** dans la couche de niveau 2.

↳ champ « plaus. »

Considérons l'ensemble des 89.63% pixels e_j de E_1^c tels que : $niv_{0j} = \mu_{1j}$. La moyenne des plausibilités $pl_j(1)$ lorsque e_j décrit cet ensemble vaut **0.94**. De la même manière, considérons l'ensemble des 9.26% pixels e_j de E_1^c tels que : $niv_{1j} = \mu_{1j}$. La moyenne des plausibilités $pl_j(1)$ lorsque e_j décrit cet ensemble vaut **0.85**. Etc.

↳ champ « sépar. »

Soit e_j un pixel de E_1^c tel que : $niv_{0j} = \mu_{1j}$. Il existe une classe i telle que : $niv_{ij} = \mu_{ij}$. Nous dirons de $pl_j(1) - pl_j(i)$ que c'est la *séparation de* e_j (elle se confond ici avec la crédibilité selon μ que e_j soit de la classe 1). Considérons maintenant l'ensemble des 89.63% pixels e_j de E_1^c tels que : $niv_{0j} = \mu_{1j}$. La moyenne des séparations de e_j lorsque e_j décrit cet ensemble vaut **0.33**. Autrement dit, pour ces 89.63% pixels, la couche de niveau 1 se situe en moyenne à 0.33 unité plausibiliste au-dessous de la couche de niveau 0 (où se trouvent ces 89.63% pixels). 0.33 est la *séparation de la couche de niveau 0 pour la classe 1*. Une séparation élevée indique un doute faible et correspond donc à un bon résultat puisque les pixels considérés sont bien classés.

Soit e_j un pixel de E_1^c tel que : $niv_{1j} = \mu_{1j}$. Il existe une classe i telle que : $niv_{0j} = \mu_{ij}$. La séparation de e_j est cette fois $pl_j(i) - pl_j(1)$. Considérons maintenant l'ensemble des 9.26% pixels e_j de E_1^c tels que : $niv_{1j} = \mu_{1j}$. La moyenne des séparations de e_j lorsque e_j décrit cet ensemble vaut **0.07**. Autrement dit, pour ces 9.26% pixels, la couche de niveau 0 se situe en moyenne à 0.07 unité plausibiliste au-dessus de la couche de niveau 1 (où se trouvent ces 9.26% pixels). 0.07 est la séparation de la couche de niveau 1 pour la classe 1. Une séparation faible indique un doute élevé et correspond donc à un bon résultat puisque les pixels considérés sont mal classés.

Soit e_j un pixel de E_1^c tel que : $niv_{2j} = \mu_{1j}$. Il existe une classe i telle que : $niv_{0j} = \mu_{ij}$. La séparation de e_j est $pl_j(i) - pl_j(1)$. Considérons maintenant l'ensemble des 1.11% pixels e_j de E_1^c tels que : $niv_{2j} = \mu_{1j}$. La moyenne des séparations de e_j lorsque e_j décrit cet ensemble vaut **0.14**. Autrement dit, pour ces 1.11% pixels, la couche de niveau 0 se situe en moyenne à 0.14 unité plausibiliste au-dessus de la couche de niveau 2 (où se trouvent ces 1.11% pixels). 0.14 est la séparation de la couche de niveau 2 pour la classe 1. Une séparation faible indique un doute élevé et correspond donc à un bon résultat puisque les pixels considérés sont mal classés.



L'ensemble des pourcentages (qui apparaissent sur les lignes grises) constitue une synthèse d'informations ordinales. Il reprend les données de la table 12. L'ensemble des autres valeurs (champs « plaus. » et « sépar. ») constitue une synthèse d'informations quantitatives soutirées de la fermeture plausibiliste de μ . Revenons au problème évoqué dans l'introduction générale et concernant l'intégration des connaissances structurelles dans le processus de classification d'une image satellite. Comme nous l'avons dit, cette intégration correspond à une modification de la partition floue issue d'une pré-classification. Considérons à nouveau la colonne 1 du tableau inférieur. (100–89.63)% des pixels de E_1^c se sont « égarés » dans des couches inférieures de la partition. 9.26% se retrouvent ainsi dans la couche 1. Le processus d'intégration pourra-t-il « repêcher » ces pixels ? On peut l'espérer, car ils sont malgré tout très proches de la couche 0 où nous aurions dû les trouver (séparation de 0.07). Mais ne risque-t-on pas en modifiant la partition floue de perdre aussi une partie des 89.63% pixels de E_1^c qui avaient été bien classés à l'issue de la pré-classification ? Le risque existe mais est relativement faible : la séparation de la couche 0 est en effet de 0.33, une séparation assez importante, nettement supérieure en tout cas à 0.07.

4.5.4. *Matrices de plausibilité et de crédibilité* *Examen des tables 14 et 15*

Soit μ une C-partition floue de E et soit ν une C-partition nette d'une partie E^c de E (partition de contrôle). Pour tout i de $1..C$ et tout j de $1..N$ notons $pl_j(i)$ la plausibilité selon μ que e_j soit de la classe i , $cr_j(i)$ la crédibilité selon μ que e_j soit de la classe i , E_i^c la classe i de ν . La matrice de plausibilité associée au couple (μ, ν) est la matrice de dimension $C \times C$ définie par :

$$\forall k \in 1..C, \forall i \in 1..C, m_{ki} = \sum_{j \in 1..N / e_j \in E_i^c} pl_j(k)$$

Il s'agit donc tout simplement de cumuler les plausibilités selon μ que e_j soit de la classe k , lorsque e_j décrit l'ensemble des parcelles de contrôle de la classe i . De la même manière, la matrice de crédibilité est la matrice de dimension $C \times C$ définie par :

$$\forall k \in 1..C, \forall i \in 1..C, m_{ki} = \sum_{j \in 1..N / e_j \in E_i^c} cr_j(k)$$

Ces deux matrices ne sont pas des tableaux de contingence. Mais si μ est nette, elles se confondent avec la matrice de confusion (§4.3). Cela découle de la proposition 3. Jetons un coup d'œil aux tables 14 et 15. Les valeurs situées sur la diagonale de la table 14a sont semblables à celles situées sur la diagonale de la table 15a. Par contre, les valeurs hors diagonale sont dans l'ensemble nettement plus faibles. Observons également que les valeurs situées sur la diagonale de la table 14b sont pour la plupart bien supérieures à celles situées sur la diagonale de la table 15b. L'enseignement semble clair : la classification FGG s'est faite avec beaucoup plus de conviction que la classification PGK. Si l'on jugeait une matrice de plausibilité comme l'on juge une matrice de confusion, la partition floue FGG s'imposerait. Mais d'aucuns peuvent arguer en étudiant les différentes matrices de plausibilité et crédibilité que celles de la table 15 rendent mieux compte de l'incertitude et de l'indécision qui accompagnent réellement le photo-interprète lors d'une classification manuelle. La partition PGK refléterait donc mieux la véritable nature du terrain et le caractère un peu artificiel de certaines classes qui sont spectralement proches et ont été différenciées par le spécialiste pour des raisons essentiellement fonctionnelles ou structurelles (c'est notamment le cas des classes du domaine immergé). Néanmoins, si l'on peut trouver la classification FGG exagérément confiante, l'on peut aussi trouver la classification PGK exagérément prudente. D'autant plus que les parcelles de contrôle (sur lesquelles s'appuient les évaluations) ne rassemblent pas a priori les pixels les plus difficiles à classer. Nous avons parlé de « l'incertitude qui accompagne le photo-interprète lors d'une classification manuelle ». Peut-on raisonnablement opter pour telle ou telle opinion sans quantifier d'abord cette incertitude ? Une chose au moins est sûre : le photo-interprète n'apprécierait pas que l'on complexifie sa tâche.

4.5.5. *Imbrications des couches de niveau* *Examen de la table 16*

La figure 7 représente deux partitions floues, par l'intermédiaire de leurs couches de niveau. Globalement, le pouvoir décisionnel que confère la partition de gauche est incomparablement supérieur à celui que confère la partition de droite. C'est du moins par cette formulation que nous nous proposons d'interpréter les très nettes différences structurales entre les deux partitions. Comment quantifier ce type de différences ? Soit μ une C-partition floue de E. Pour tout élément k de $0..C-1$, tout i de $1..C$ et tout j de $1..N$ notons niv_k la couche de niveau k de μ , $pl_j(i)$ la plausibilité selon μ que e_j soit de la classe i . Notons enfin f l'application de $[0,1]$ vers $[0,1]$

définie par : $\forall t \in [0,1], f(t) = |\{j \in 1..N / \text{niv}_{1j} < t\}| / N$. Les outils proposés dans ce paragraphe permettent d'apprécier dans quelle mesure les couches de niveau de μ s'imbriquent dans la couche de référence niv_1 .

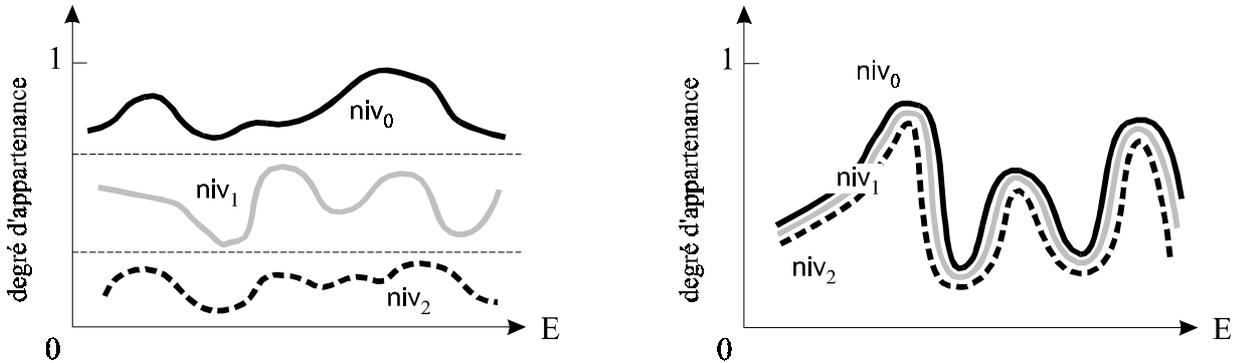


figure 7. Imbrications. Cas extrêmes.

- a) À gauche : le degré global d'imbrication (définition 14) est minimal (0).
b) À droite : le degré global d'imbrication est maximal (1).

Définition 13.

Soit k un élément de $0..C-1$. Il existe au moins une permutation τ de $1..N$ telle que :

$$\forall \ell \in 1..N-1, f(\text{niv}_{k\tau(\ell)}) \geq f(\text{niv}_{k\tau(\ell+1)})$$

Choisissons-en une et considérons l'application imb_k de $[0,1]$ vers $[0,1]$ définie par :

$$\forall u \in [0,1], u \leq 1/N \Rightarrow \text{imb}_k(u) = f(\text{niv}_{k\tau(1)})$$

$$\forall u \in [0,1], \forall \ell \in 2..N, (\ell-1)/N < u \leq \ell/N \Rightarrow \text{imb}_k(u) = f(\text{niv}_{k\tau(\ell)})$$

imb_k est indépendante du choix de τ : c'est l'imbrication de la couche de niveau k .

Soit ℓ un élément de $1..N$. Il existe une classe i telle que : $\text{niv}_{k\tau(\ell)} = \mu_{i\tau(\ell)}$. Nous avons : $f(\text{niv}_{k\tau(\ell)}) = f(\mu_{i\tau(\ell)}) = \text{pl}_{\tau(\ell)}(i)$. La permutation τ correspond donc à « un rangement des points de la couche de niveau k par plausibilités décroissantes ». Soit maintenant v_0 un élément de $[0,1]$. Si l'ensemble $\{u \in [0,1] / v_0 = \text{imb}_k(u)\}$ n'est pas vide, il admet un maximum u_0 : u_0 est « la proportion des points de la couche de niveau k dont la plausibilité est supérieure ou égale à v_0 ».

Les imbrications vérifient : $\forall k \in 0..C-2, \text{imb}_k \geq \text{imb}_{k+1}$. Ce sont des fonctions décroissantes en escalier. Elles sont donc intégrables au sens de Riemann. Des considérations d'aires permettent de définir des *degrés d'imbrication* (fig.8 et définition 14). Ce sont des valeurs comprises entre 0 et 1. Le degré d'imbrication de la couche de niveau 1 est évidemment maximal (égal à 1).

Définition 14.

Le *dgré d'imbrication* de la partition μ — ou *dgré global d'imbrication* — est :

$$(1 - \int_0^1 \text{imb}_0(u).du) + \int_0^1 \text{imb}_2(u).du$$

Le *dgré d'imbrication* de la couche de niveau 0 est : $(1 - \int_0^1 \text{imb}_0(u).du) / (1 - \int_0^1 \text{imb}_1(u).du)$

Soit maintenant k un élément de $1..C-1$. Si $\int_0^1 \text{imb}_1(u).du$ n'est pas nul, le *dgré d'imbrication* de la couche de niveau k est : $\int_0^1 \text{imb}_k(u).du / \int_0^1 \text{imb}_1(u).du$. Sinon, c'est :

$$|\{j \in 1..N / \text{niv}_{kj} = \text{niv}_{1j}\}| / N$$

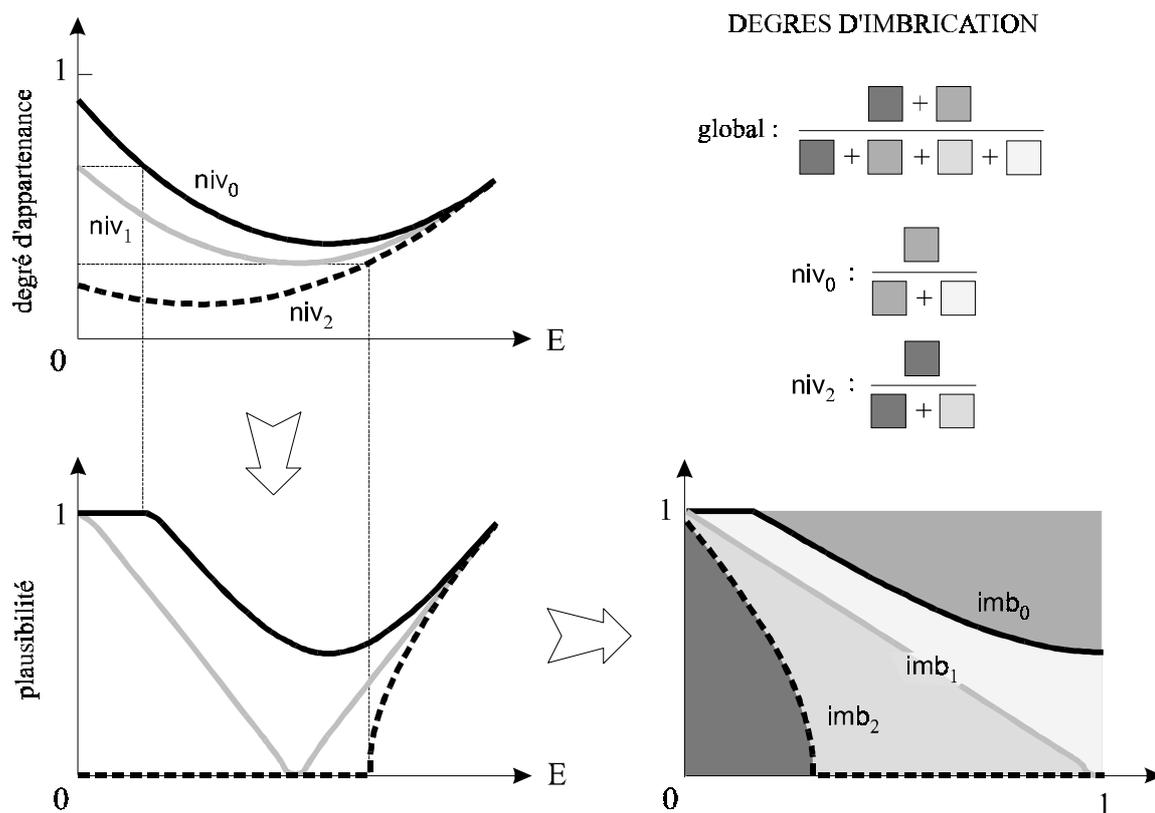


figure 8. Calcul des imbrications.

En haut à gauche : les couches de niveau d'une 3-partition floue μ .
 En bas à gauche : les plausibilités correspondantes (couches de niveau de la fermeture μ^*).
 En bas à droite : les imbrications des couches de niveau de μ (et de μ^*).

Examinons le graphique supérieur de la table 16. Il nous montre clairement que les couches de niveau de la partition floue FGG sont très faiblement imbriquées (la surface de la zone grise est faible, le degré global d'imbrication est de **11.94%** seulement). La couche de niveau 0 est presque totalement séparée de la couche de niveau 1. Son degré d'imbrication n'est que de **0.10%**. Le degré d'imbrication de la couche de niveau 2 est beaucoup plus élevé : **25.29%**. Une estimation visuelle donne : $imb_2(0.10) \approx 0.50$. Environ 10% des pixels admettent dans la couche de niveau 2 une plausibilité supérieure à 0.50. 90% admettent donc une plausibilité inférieure. D'ailleurs, près de 70% des pixels admettent dans la couche de niveau 2 une plausibilité nulle. Au-delà des chiffres, retenons surtout l'enseignement suivant : une représentation en deux dimensions de la partition floue FGG se rapprocherait bien plus de la figure 7a que de la figure 7b. Une représentation en deux dimensions de la partition floue PGK se situerait par contre à mi-chemin entre la figure 7a et la figure 7b. Le degré d'imbrication de cette partition est proche en effet de 50% (**47.55%**). Dans le paragraphe §4.5.4, l'examen des matrices de plausibilité et crédibilité nous avait incité à dire que la classification FGG s'est faite (à tort ou à raison) avec beaucoup plus de conviction que la classification PGK. Les graphiques de la table 16 illustrent bien cette affirmation.

5. Conclusion

Nous nous sommes penchés dans ce chapitre sur le problème de l'évaluation et de la comparaison de partitions en classification d'images. Le mot « partition » recouvre différentes entités mathématiques. Nous avons donc commencé par étudier ce point. Nous avons décrit ensuite le principe d'algorithmes tels que ceux de type HCM, FCM et PCM. Car la notion de partition est fortement liée à celle de “clustering”. En particulier, nous avons décrit les algorithmes FGG et PGK qui sont à l'origine des deux partitions floues considérées tout le long de l'étude.

Ces deux partitions sont bien sûr imparfaites. Par exemple, le produit de leur “défuzzification” ne saurait rivaliser avec la partition nette qui pourrait être issue d'une classification manuelle. Car lors d'une telle classification, le photo-interprète exploiterait naturellement, outre les informations radiométriques, quantité de connaissances expertes. Il sait par exemple qu' « un hoa a souvent une forme rectangulaire », qu' « une mare à kopara est toujours entourée de domaine terrestre », que « relativement au conglomérat intertidal, le platier se trouve toujours dans la direction de l'océan », etc. Considérons alors les partitions floues FGG et PGK comme le résultat de simples pré-classifications. Peut-on espérer réduire leurs imperfections en tenant compte maintenant, d'une manière ou d'une autre, de connaissances structurelles expertes telles que les précédentes ? À la lumière de l'étude réalisée dans ce chapitre, la réponse est oui. Nous avons vu en effet que dans l'ensemble, les pixels « bien classés » (plus exactement, qui seraient bien classés si l'on procédait à une “défuzzification” de la partition) « stationnent » bien au-dessus des couches de niveau inférieures. Quant aux pixels mal classés, ils se rassemblent principalement dans la couche de niveau 1 et restent proches de la couche 0 où ils devraient se trouver. Une modification de la partition floue dans le but de repêcher ces pixels est donc envisageable. Mais il nous est difficile de dire si certaines partitions se prêtent mieux que d'autres, de par leur nature, à un semblable processus d'intégration des connaissances structurelles.

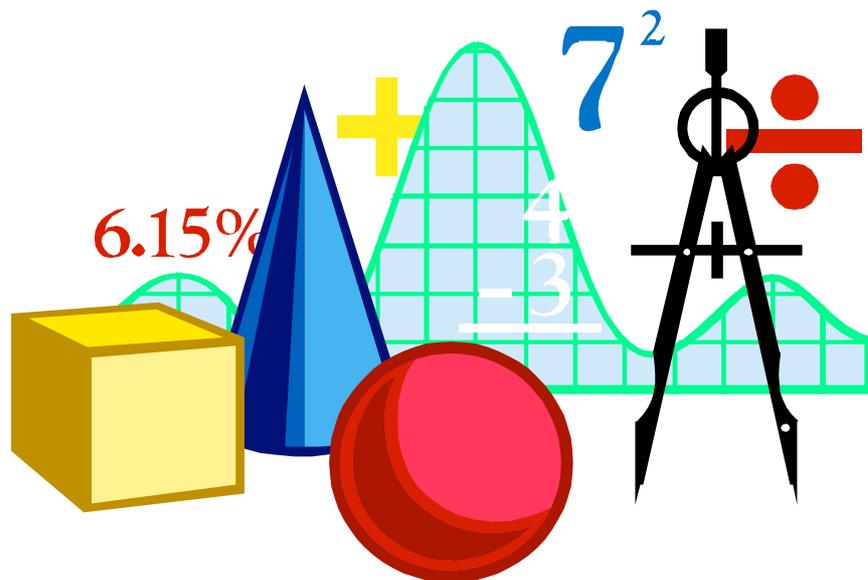
D'un point de vue général, comparer deux partitions consiste à mesurer la dépendance de deux variables. Ces variables peuvent être binaires, qualitatives, ordinales ou quantitatives. Seul le second cas a réellement retenu l'attention des auteurs. Le premier cas, beaucoup moins riche d'enseignement, a été naturellement délaissé. Les deux autres ont été rarement abordés. Sans doute parce que le produit classique d'une cartographie par satellite est une partition nette : le « flou » est considéré comme un moyen, non comme une fin en soi, et les partitions floues sont généralement condamnées à subir une “défuzzification” immédiate. La somme des informations quantitatives recélées dans une partition floue est pourtant incomparablement supérieure à la somme des informations purement qualitatives recélées dans une partition nette. L'analyse de frontières, de mixels, la levée d'ambiguïtés par l'exploitation de connaissances d'experts sont des tâches que seule l'étude d'une partition floue peut permettre d'accomplir.

La connaissance des rangs dans une partition floue permet l'établissement de listes de priorité dans les intentions de classification. La notion de rang est liée à celle d'interdépendance faible. Comparer deux partitions floues sur la base d'informations concernant les rangs — autrement dit, sur la base d'informations ordinales — revient à développer des outils d'évaluation insensibles à la relation d'interdépendance faible. Dans l'idée de développer des outils encore plus fins, permettant la considération d'informations quantitatives, nous avons proposé de comparer deux

partitions par l'intermédiaire de leurs fermetures plausibilistes, une notion liée à celle d'interdépendance forte. Aux degrés d'appartenance, dont la nature dépend de la partition considérée, sont substitués des degrés de plausibilité issus d'une auto-évaluation de la partition. Nous nous sommes surtout attachés à décrire le matériau sur lequel, suivant le type des variables mises en jeu, doivent ou peuvent s'appliquer les outils évoqués plus haut. Le développement en lui-même de tels outils est une question complexe, que nous n'avons pas ici la prétention de traiter. La profusion des coefficients et indices proposés pour analyser une matrice de confusion — qui ne constitue pourtant la synthèse « que » d'informations qualitatives — témoigne bien de cette complexité. Les matrices de plausibilité et crédibilité, les imbrications et degrés d'imbrication, ne représentent qu'un premier pas vers le développement de véritables outils d'évaluation de partitions floues. Ils nous ont permis tout au moins de mettre en évidence d'importantes différences entre les deux partitions étudiées. Des différences que la considération d'informations binaires, qualitatives et ordinales ne laissaient pas présager.

ANNEXE A

Démonstrations



 (§4.5.1) **Proposition 1**

C est un entier supérieur ou égal à 2,

$(p_i)_{i \in 1..C}$ est une suite décroissante d'éléments de $[0,1]$,

$(c_i)_{i \in 1..C}$ est la suite d'éléments de $[0,1]$ définie par : $c_1 = p_1 - p_2$ et $\forall i \in 2..C, c_i = 0$

❶ Démontrer la proposition 1, c'est démontrer qu'il existe une allocation de masse de croyance m définie sur l'ensemble des parties de $1..C+1$ et vérifiant : $\forall i \in 1..C, Pl(\{i\}) = p_i$ et $Cr(\{i\}) = c_i$ où Pl et Cr sont les mesures respectivement de plausibilité et crédibilité associées à m . Posons :

$$\forall i \in 1..C-1, m(1..i) = p_i - p_{i+1} \quad \text{et} \quad m(1..C) = p_C \quad \text{et} \quad m(\{C+1\}) = 1 - p_1$$

Pour toute autre partie A de $1..C+1$, posons : $m(A) = 0$. Nous définissons ainsi une application m de l'ensemble des parties de $1..C+1$ vers $[0,1]$. Nous avons :

$$m(\emptyset) = 0$$

$$\sum_{A \subset 1..C+1} m(A) = m(\{C+1\}) + \sum_{i \in 1..C} m(1..i) = (1 - p_1) + [\sum_{i \in 1..C-1} (p_i - p_{i+1})] + p_C = 1$$

$$\forall i \in 1..C, \sum_{A \subset 1..C+1 / A \cap \{i\} \neq \emptyset} m(A) = \sum_{j \in i..C} m(1..j) = [\sum_{j \in i..C-1} (p_j - p_{j+1})] + p_C = p_i$$

$$\sum_{A \subset 1..C+1 / A \subset \{1\}} m(A) = m(\{1\}) = p_1 - p_2 = c_1 \quad \text{et} \quad \forall i \in 2..C, \sum_{A \subset 1..C+1 / A \subset \{i\}} m(A) = 0 = c_i$$

m répond donc bien au problème posé.

❷ Remarques.

➔ De manière générale, il n'existe pas d'allocation de masse de croyance m définie sur l'ensemble des parties de $1..C$ et vérifiant $\forall i \in 1..C, Pl(\{i\}) = p_i$ où Pl est la mesure de plausibilité associée à m . En effet, on peut très bien avoir : $\sum_{i \in 1..C} p_i < 1$. Auquel cas il est évidemment impossible de satisfaire à l'égalité : $\sum_{A \subset 1..C} m(A) = 1$

D'où la considération d'une $C+1$ -ième classe : la classe « bruit ».

➔ Une seule classe est crédible (ou du moins, peut l'être) : celle qui est la plus plausible. Peut-on renforcer la crédibilité des autres classes ? Redéfinissons par exemple $(c_i)_{i \in 1..C}$ de la manière suivante :

$$c_1 = p_1 - p_2$$

$$\forall i \in 2..C-1, c_i = \min \{1 - p_1, c_{i-1}, p_i - p_{i+1}\}$$

$$c_C = \min \{1 - p_1, c_{C-1}, p_C\}$$

Cette redéfinition semble correspondre à un renforcement « minimum » des crédibilités. Mais il est facile de montrer qu'en général, il n'existe pas d'allocation de masse de croyance m définie sur l'ensemble des parties de $1..C+1$ et vérifiant : $\forall i \in 1..C, Pl(\{i\}) = p_i$ et $Cr(\{i\}) = c_i$

Encore une fois, il est impossible de satisfaire à l'égalité : $\sum_{A \subset 1..C+1} m(A) = 1$

 (§4.5.1) **Proposition 2**

N et C sont deux entiers tels que $N \geq C \geq 2$,

E est un ensemble de N éléments assimilé à un N -uplet $(e_j)_{j \in 1..N}$,

$\mu = (\mu_i)_{i \in 1..C}$ est une C -partition floue de E .

Nous montrons ici que : $(\mu^*)^* = \mu^*$

① Préliminaires.

Pour tout i de $1..C$, tout j de $1..N$, tout k de $0..C-1$,
notons $pl_j(i)$ la plausibilité selon μ que e_j soit de la classe i , niv_k la couche de niveau k de μ ,
 $pl_j^*(i)$ la plausibilité selon μ^* que e_j soit de la classe i , niv_k^* la couche de niveau k de μ^* .
Notons d'autre part f et f^* les applications de $[0,1]$ vers $[0,1]$ définies par :

$$\forall t \in [0,1], f(t) = |\{j \in 1..N / niv_{1j} < t\}| / N \quad (1)$$

$$\forall t \in [0,1], f^*(t) = |\{j \in 1..N / niv_{1j}^* < t\}| / N \quad (2)$$

Par définition des plausibilités et de la fermeture plausibiliste d'une partition :

$$\forall i \in 1..C, \forall j \in 1..N, \mu_{ij}^* = pl_j(i) = f(\mu_{ij}) \quad (3)$$

$$\forall i \in 1..C, \forall j \in 1..N, (\mu^*)_{ij}^* = pl_j^*(i) = f^*(\mu_{ij}^*) \quad (4)$$

Pour tout j de $1..N$, notons τ_j une permutation de $1..C$ telle que : $\forall k \in 1..C-1, \mu_{\tau_j(k)j} \geq \mu_{\tau_j(k+1)j}$
Nous avons ((6) résulte de la définition 10 d'une couche de niveau) :

$$\forall j \in 1..N, \forall k \in 1..C-1, \mu_{\tau_j(k)j} \geq \mu_{\tau_j(k+1)j} \quad (5)$$

$$\forall j \in 1..N, \forall k \in 0..C-1, niv_{kj} = \mu_{\tau_j(k+1)j} \quad (6)$$

② En général, f n'est pas strictement croissante. Nous avons néanmoins :

$$\forall i \in 1..C, \forall j \in 1..N, \forall k \in 1..N, niv_{1k} < \mu_{ij} \Leftrightarrow f(niv_{1k}) < f(\mu_{ij}) \quad (7)$$

C'est ce que nous allons montrer maintenant.

Soit donc i un élément de $1..C$, j et k deux éléments de $1..N$.

En appliquant tour à tour (1) et (6) il vient :

$$f(niv_{1k}) = f(\mu_{\tau_k(2)k}) = |\{\ell \in 1..N / niv_{1\ell} < \mu_{\tau_k(2)k}\}| / N = |\{\ell \in 1..N / \mu_{\tau_\ell(2)\ell} < \mu_{\tau_k(2)k}\}| / N \quad (8)$$

$$f(\mu_{ij}) = |\{\ell \in 1..N / niv_{1\ell} < \mu_{ij}\}| / N = |\{\ell \in 1..N / \mu_{\tau_\ell(2)\ell} < \mu_{ij}\}| / N \quad (9)$$

→ Montrons tout d'abord que f est croissante.

Soit t_1 et t_2 deux éléments de $[0,1]$ tels que : $t_1 < t_2$. Cette hypothèse et (1) donnent :

$$f(t_2) = |\{\ell \in 1..N / niv_{1\ell} < t_2\}| / N = (|\{\ell \in 1..N / niv_{1\ell} < t_1\}| + |\{\ell \in 1..N / t_1 \leq niv_{1\ell} < t_2\}|) / N$$

$$f(t_2) = f(t_1) + |\{\ell \in 1..N / t_1 \leq niv_{1\ell} < t_2\}| / N$$

Par conséquent : $f(t_1) \leq f(t_2)$

f est bien croissante. D'où : $niv_{1k} \geq \mu_{ij} \Rightarrow f(niv_{1k}) \geq f(\mu_{ij})$

→ Supposons $niv_{1k} < \mu_{ij}$, c'est-à-dire d'après (6) : $\mu_{\tau_k(2)k} < \mu_{ij}$

Cette hypothèse ainsi que (8) et (9) nous permettent d'écrire :

$$f(\mu_{ij}) = (|\{\ell \in 1..N / \mu_{\tau_\ell(2)\ell} < \mu_{\tau_k(2)k}\}| + |\{\ell \in 1..N / \mu_{\tau_k(2)k} \leq \mu_{\tau_\ell(2)\ell} < \mu_{ij}\}|) / N$$

$$f(\mu_{ij}) = f(niv_{1k}) + |\{\ell \in 1..N / \mu_{\tau_k(2)k} \leq \mu_{\tau_\ell(2)\ell} < \mu_{ij}\}| / N$$

Or : $|\{\ell \in 1..N / \mu_{\tau_k(2)k} \leq \mu_{\tau_\ell(2)\ell} < \mu_{ij}\}| > 0$. En effet : $k \in \{\ell \in 1..N / \mu_{\tau_k(2)k} \leq \mu_{\tau_\ell(2)\ell} < \mu_{ij}\}$

Par conséquent : $f(\mu_{ij}) > f(niv_{1k})$

→ Nous avons montré d'une part que : $niv_{1k} < \mu_{ij} \Rightarrow f(niv_{1k}) < f(\mu_{ij})$

d'autre part que : $niv_{1k} \geq \mu_{ij} \Rightarrow f(niv_{1k}) \geq f(\mu_{ij})$

c'est-à-dire que : $f(niv_{1k}) < f(\mu_{ij}) \Rightarrow niv_{1k} < \mu_{ij}$

En conclusion : $niv_{1k} < \mu_{ij} \Leftrightarrow f(niv_{1k}) < f(\mu_{ij})$

③ Nous pouvons achever maintenant la démonstration.

→ Soit j un élément de $1..N$.

(5) et la croissance de f (cf. ②) donnent : $\forall k \in 1..C-1, f(\mu_{\tau_j(k)j}) \geq f(\mu_{\tau_j(k+1)j})$

Autrement dit, d'après (3) : $\forall k \in 1..C-1, \mu_{\tau_j(k)j}^* \geq \mu_{\tau_j(k+1)j}^*$. La définition 10

d'une couche de niveau permet donc d'écrire : $\forall k \in 0..C-1, \text{niv}_{kj}^* = \mu_{\tau_j(k+1)j}^*$

En exploitant (3) puis (6), nous obtenons finalement le résultat suivant :

$$\forall j \in 1..N, \forall k \in 0..C-1, \text{niv}_{kj}^* = \mu_{\tau_j(k+1)j}^* = f(\mu_{\tau_j(k+1)j}) = f(\text{niv}_{kj}) \quad (10)$$

→ Soit i un élément de $1..C$ et j un élément de $1..N$.

En appliquant successivement (4), (2), (10), (7), (1) et (3), il vient :

$$\begin{aligned} (\mu^*)_{ij}^* &= f^*(\mu_{ij}^*) = |\{\ell \in 1..N / \text{niv}_{1\ell}^* < \mu_{ij}^*\}| / N = |\{\ell \in 1..N / f(\text{niv}_{1\ell}) < f(\mu_{ij})\}| / N \\ (\mu^*)_{ij}^* &= |\{\ell \in 1..N / \text{niv}_{1\ell} < \mu_{ij}\}| / N = f(\mu_{ij}) = \mu_{ij}^* \end{aligned}$$

Nous avons donc : $(\mu^*)^* = \mu^*$

(§4.5.1) Proposition 3

N et C sont deux entiers tels que $N \geq C \geq 2$, E est un ensemble de N éléments assimilé à un N -uplet $(e_j)_{j \in 1..N}$, $\mu = (\mu_i)_{i \in 1..C}$ est une C -partition floue de E . Pour tout i de $1..C$, j de $1..N$, k de $0..C-1$, $pl_j(i)$ dénote la plausibilité selon μ que e_j soit de la classe i , niv_k la couche de niveau k de μ .

→ Soit i un élément de $1..C$ et j un élément de $1..N$. Supposons μ_{ij} nul.

Nous avons : $0 \leq cr_j(i) \leq pl_j(i) = |\{\ell \in 1..N / \text{niv}_{1\ell} < \mu_{ij}\}| / N = |\{\ell \in 1..N / \text{niv}_{1\ell} < 0\}| / N = 0$

→ Soit i un élément de $1..C$ et j un élément de $1..N$. Supposons μ nette.

Soit τ l'une des permutations de $1..C$ telle que : $\forall k \in 1..C-1, \mu_{\tau(k)j} \geq \mu_{\tau(k+1)j}$

Nous avons : $\mu_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = \tau(1)$. D'autre part :

$$\begin{aligned} pl_j(\tau(1)) &= |\{\ell \in 1..N / \text{niv}_{1\ell} < \mu_{\tau(1)j}\}| / N = |\{\ell \in 1..N / 0 < 1\}| / N = 1 \\ pl_j(\tau(2)) &= |\{\ell \in 1..N / \text{niv}_{1\ell} < \mu_{\tau(2)j}\}| / N = |\{\ell \in 1..N / 0 < 0\}| / N = 0 \\ cr_j(\tau(1)) &= pl_j(\tau(1)) - pl_j(\tau(2)) = 1 \end{aligned}$$

En définitive : $\mu_{ij} = 1 \Rightarrow pl_j(i) = cr_j(i) = 1$

(§4.5.1) Proposition 4

N et C sont deux entiers tels que $N \geq C \geq 2$,

E est un ensemble de N éléments assimilé à un N -uplet $(e_j)_{j \in 1..N}$,

$\mu = (\mu_i)_{i \in 1..C}$ et $\nu = (\nu_i)_{i \in 1..C}$ sont deux C -partitions floues de E fortement interdépendantes.

① Préliminaires.

μ et ν étant fortement interdépendantes (définition 9),

il existe une bijection croissante φ de $[0,1]$ sur $[0,1]$ telle que :

$$\forall i \in 1..C, \nu_i = \varphi \circ \mu_i \quad (1)$$

Pour tout i de $1..C$, tout j de $1..N$, tout k de $0..C-1$,

notons $p_j(i)$ la plausibilité selon μ que e_j soit de la classe i , m_k la couche de niveau k de μ ,

notons $q_j(i)$ la plausibilité selon v que e_j soit de la classe i , n_k la couche de niveau k de v .
Notons d'autre part f et g les applications de $[0,1]$ vers $[0,1]$ définies par :

$$\forall t \in [0,1], f(t) = |\{j \in 1..N / m_{1j} < t\}| / N \quad (2)$$

$$\forall t \in [0,1], g(t) = |\{j \in 1..N / n_{1j} < t\}| / N \quad (3)$$

Pour tout j de $1..N$, notons τ_j une permutation de $1..C$ telle que : $\forall k \in 1..C-1, \mu_{\tau_j(k)j} \geq \mu_{\tau_j(k+1)j}$
 φ étant croissante : $\forall k \in 1..C-1, \varphi(\mu_{\tau_j(k)j}) \geq \varphi(\mu_{\tau_j(k+1)j})$

Soit d'après (1) : $\forall k \in 1..C-1, v_{\tau_j(k)j} \geq v_{\tau_j(k+1)j}$

La définition 10 d'une couche de niveau nous permet donc d'écrire :

$$\forall j \in 1..N, \forall k \in 0..C-1, m_{kj} = \mu_{\tau_j(k+1)j} \quad (4)$$

$$\forall j \in 1..N, \forall k \in 0..C-1, n_{kj} = v_{\tau_j(k+1)j} \quad (5)$$

➊ Nous pouvons rentrer maintenant dans le vif de la démonstration.

➔ Montrons tout d'abord que : $g \circ \varphi = f$

Soit t un élément quelconque de $[0,1]$.

D'après (3) : $(g \circ \varphi)(t) = g(\varphi(t)) = |\{j \in 1..N / n_{1j} < \varphi(t)\}| / N$

D'après (5) puis (1) : $(g \circ \varphi)(t) = |\{j \in 1..N / v_{\tau_j(2)j} < \varphi(t)\}| / N = |\{j \in 1..N / \varphi(\mu_{\tau_j(2)j}) < \varphi(t)\}| / N$

Or φ est strictement croissante sur $[0,1]$ (car bijective et croissante).

Il vient donc : $(g \circ \varphi)(t) = |\{j \in 1..N / \mu_{\tau_j(2)j} < t\}| / N$

Enfin, d'après (4) puis (2) : $(g \circ \varphi)(t) = |\{j \in 1..N / m_{1j} < t\}| / N = f(t)$

Nous avons bien l'égalité : $g \circ \varphi = f$

➔ Soit i un élément de $1..C$ et j un élément de $1..N$.

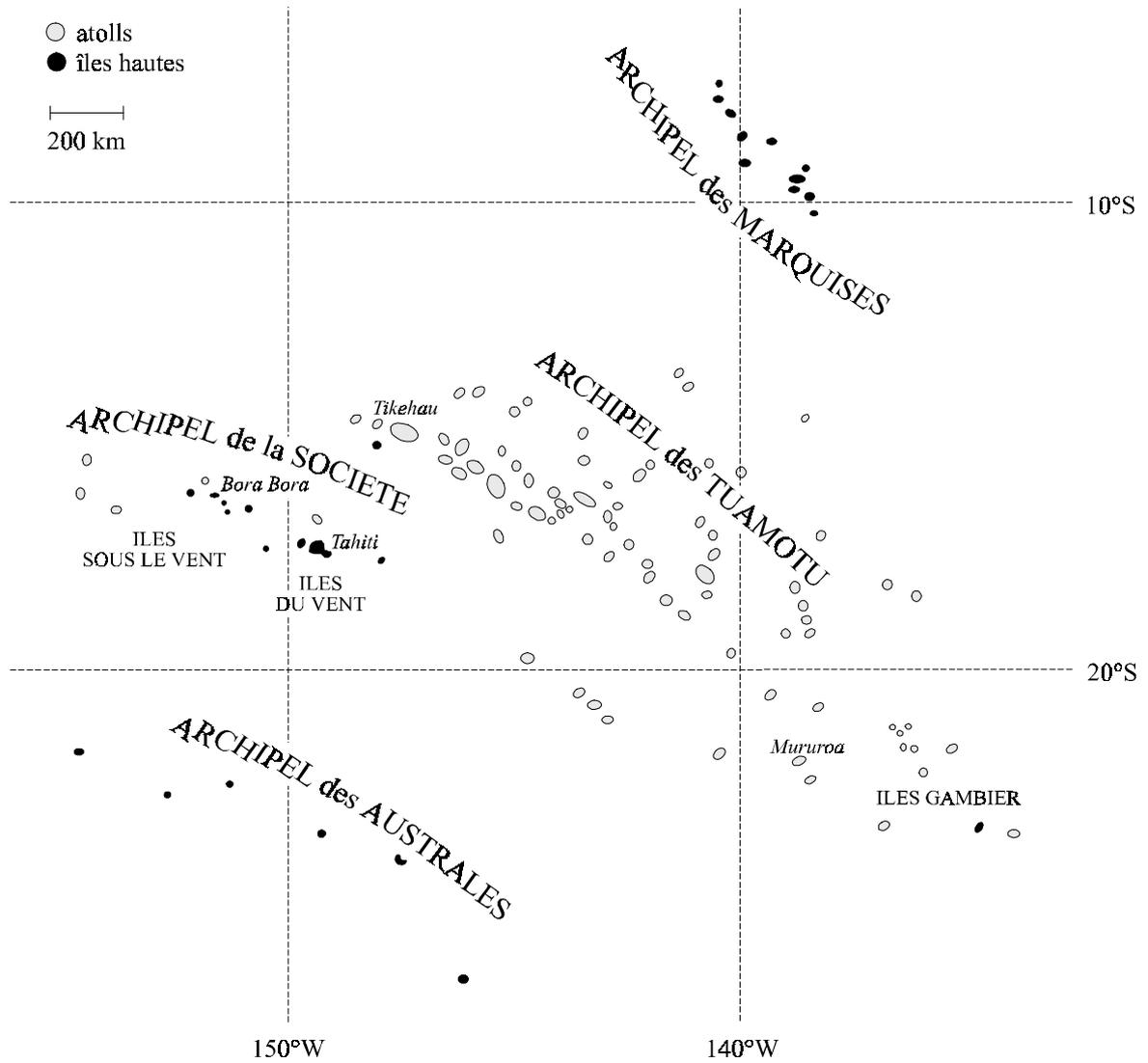
L'égalité précédente, (1) et la définition des plausibilités nous permettent d'écrire :

$$q_j(i) = g(v_{ij}) = g(\varphi(\mu_{ij})) = f(\mu_{ij}) = p_j(i)$$

Autrement dit, la plausibilité selon v que e_j soit de la classe i est égale à la plausibilité selon μ que e_j soit de la classe i . Les crédibilités étant exprimées en fonction des plausibilités, la crédibilité selon v que e_j soit de la classe i est évidemment égale à la crédibilité selon μ que e_j soit de la classe i . C'est bien ce que nous voulions démontrer.

ANNEXE B

Tables



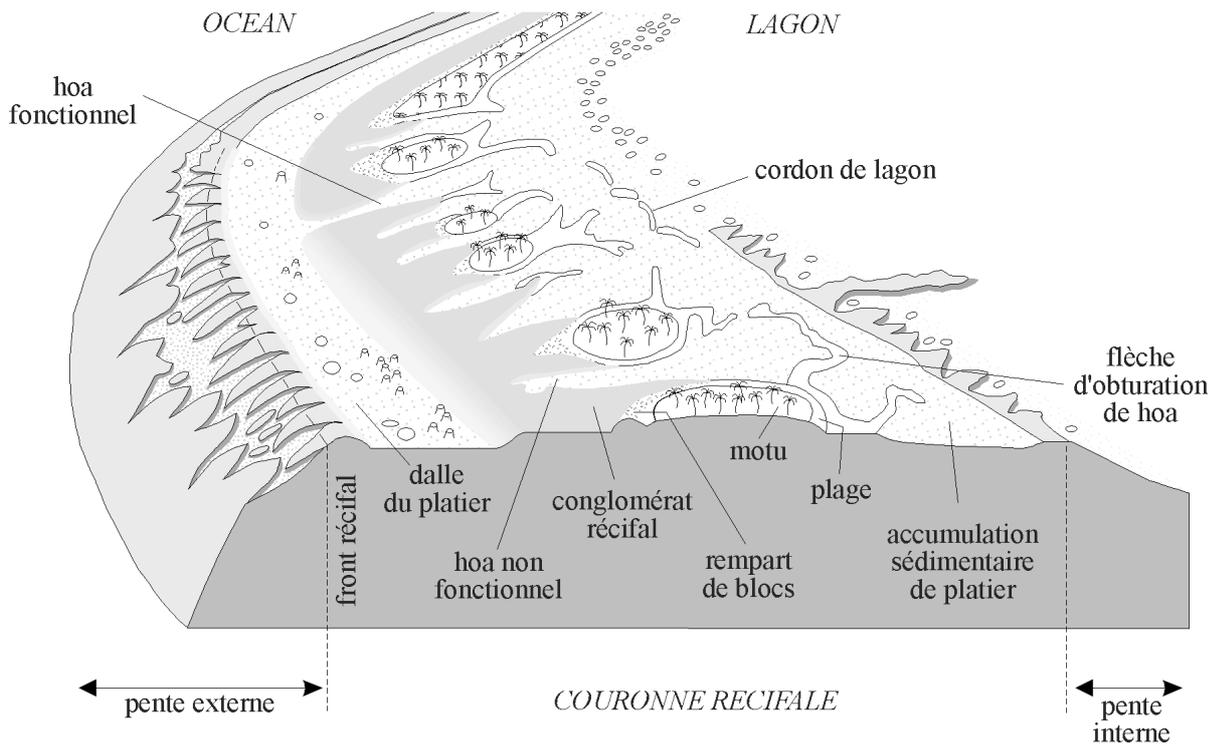
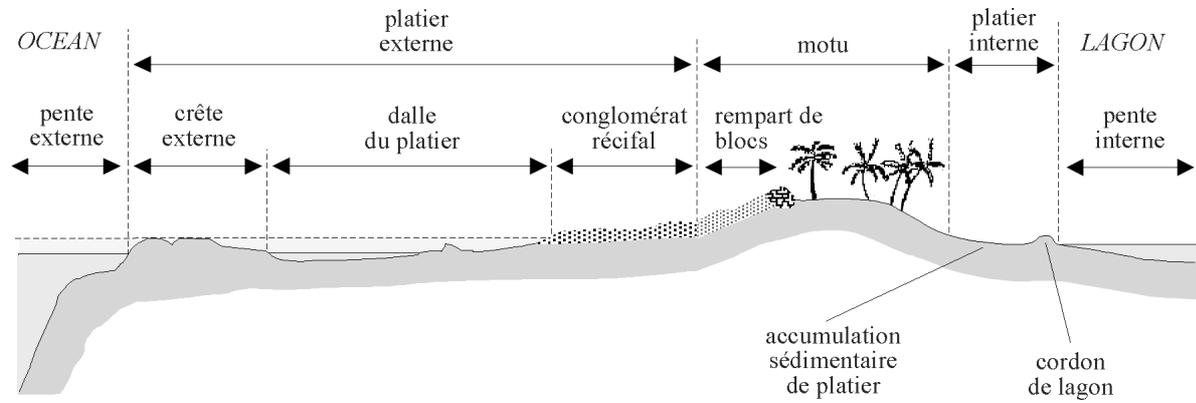
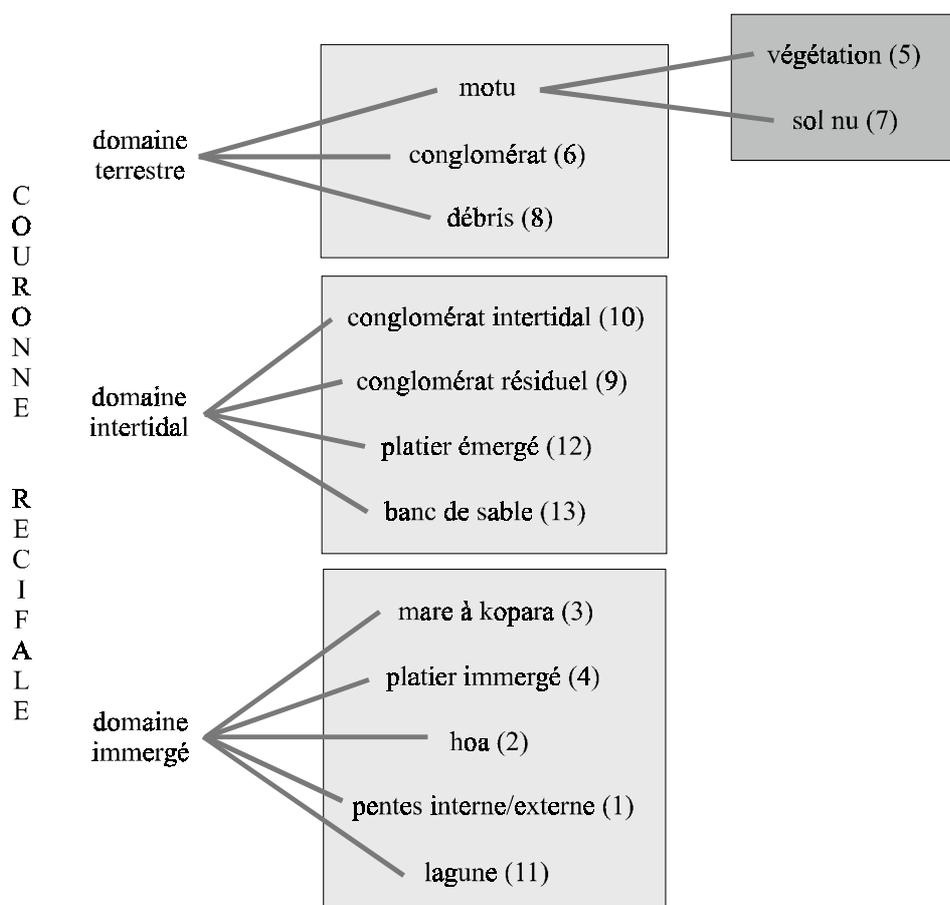


table 1. Morphologie d'un atoll des Tuamotu.
(d'après Batt75)



- 1 ← pentes interne/externe ← *domaine immergé*
 2 ← hoa ← *domaine immergé*
 3 ← mare à kopara ← *domaine immergé*
 4 ← platier immergé ← *domaine immergé*
 5 ← végétation ← motu ← *domaine terrestre*
 6 ← conglomérat ← *domaine terrestre*
 7 ← sol nu ← motu ← *domaine terrestre*
 8 ← débris ← *domaine terrestre*
 9 ← conglomérat résiduel ← *domaine intertidal*
 10 ← conglomérat intertidal ← *domaine intertidal*
 11 ← lagune ← *domaine immergé*
 12 ← platier émergé ← *domaine intertidal*
 13 ← banc de sable ← *domaine intertidal*

table 2. Classes considérées : numéros et labels.

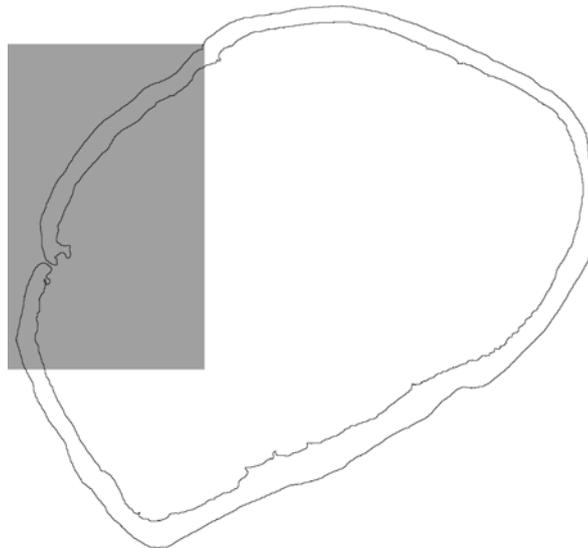


table 3. *Atoll de Tikehau. Extrait de l'image SPOT XS considérée.*
Le diamètre de l'atoll est d'une vingtaine de kilomètres.

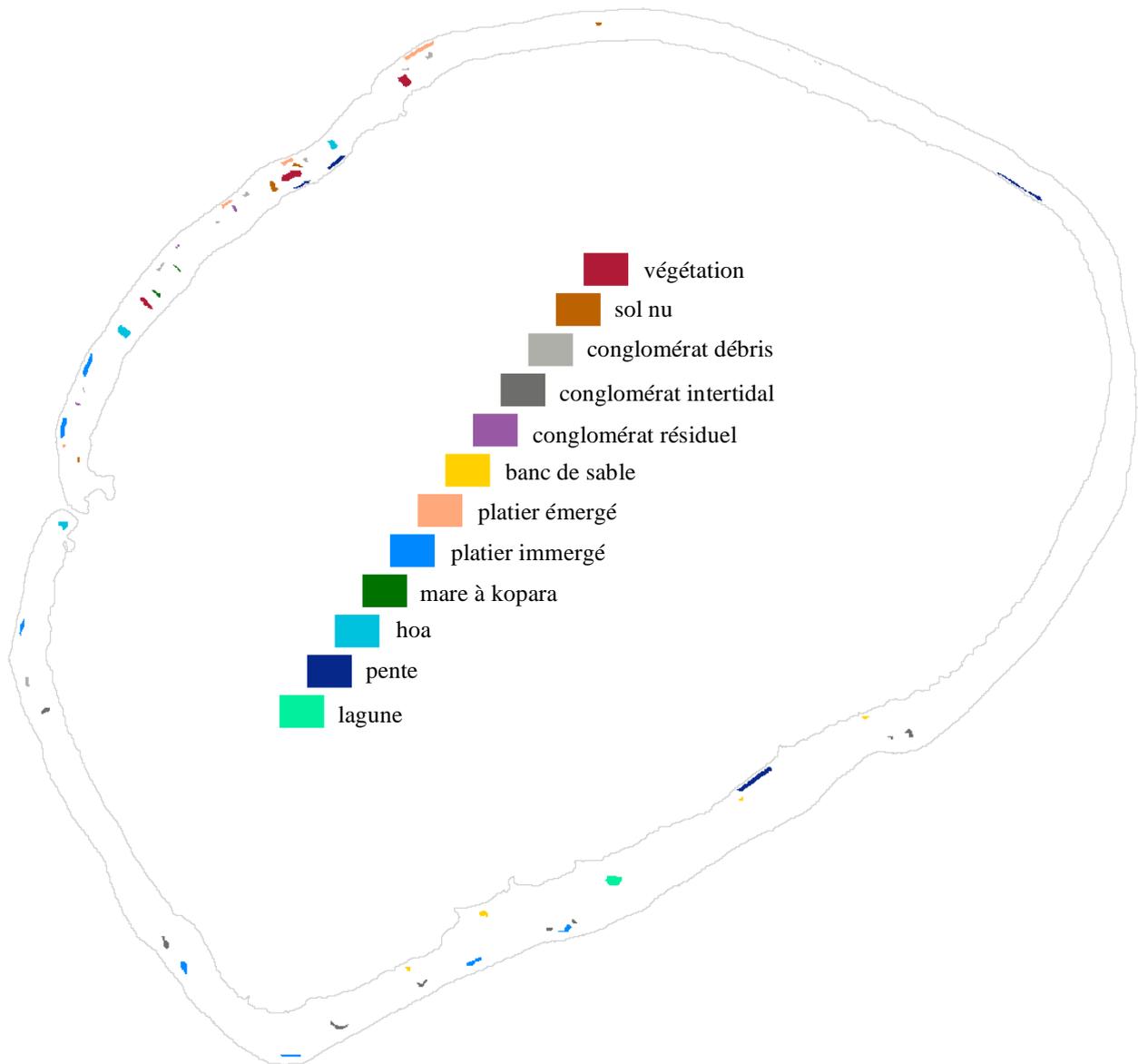


table 4. Parcelles d'apprentissage.

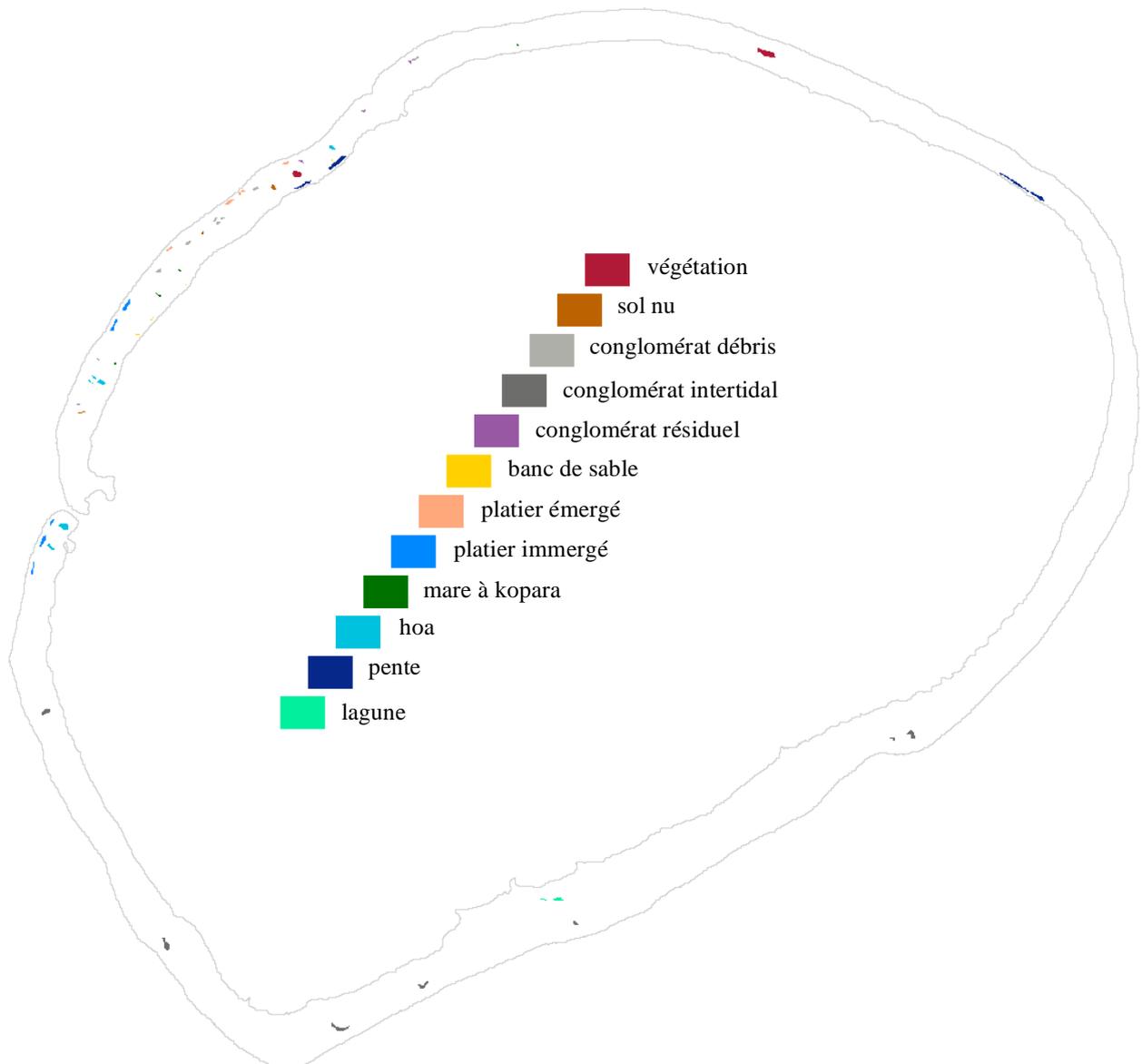


table 5. *Parcelles de contrôle.*

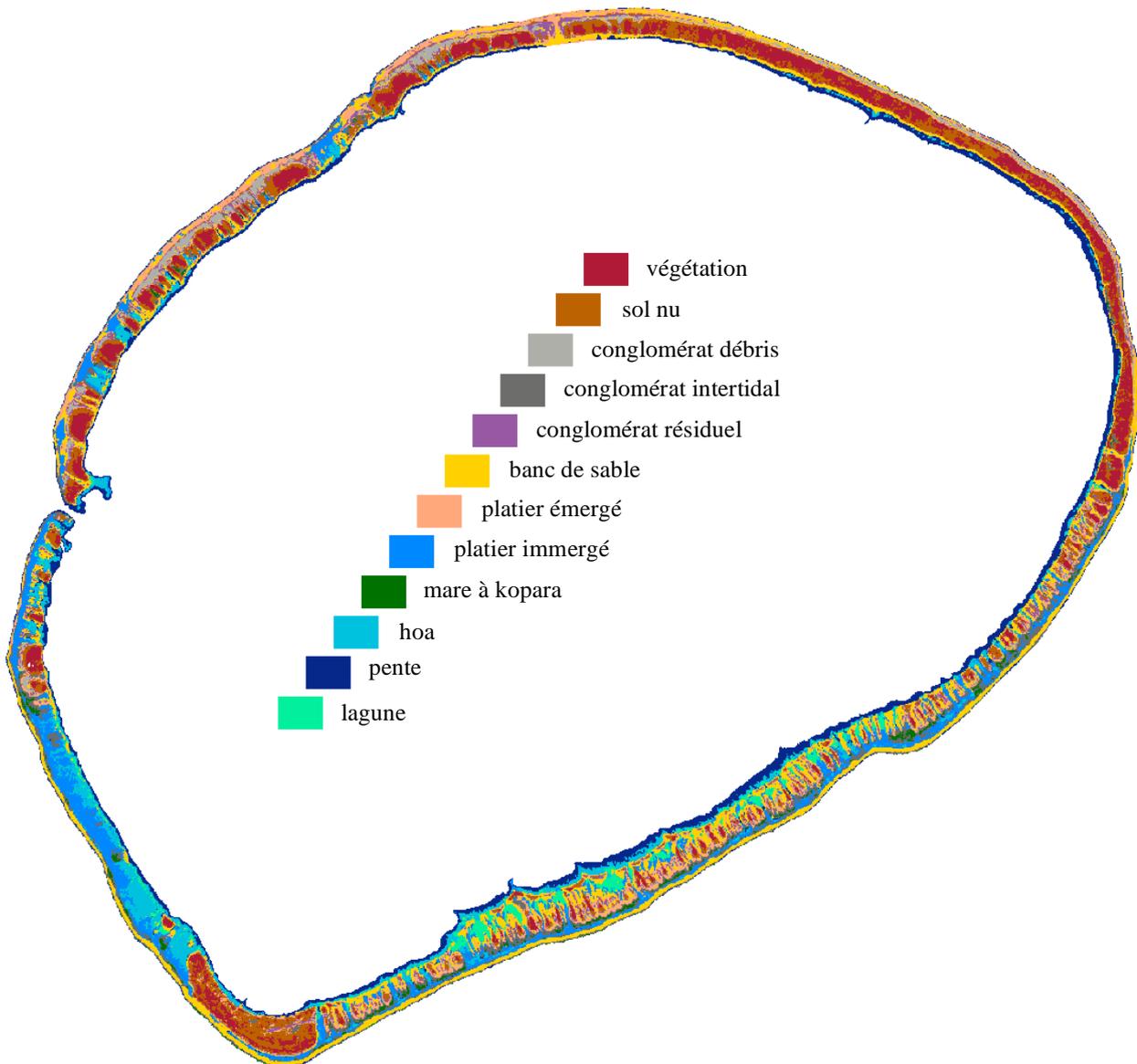


table 6. *Classification FGG.*

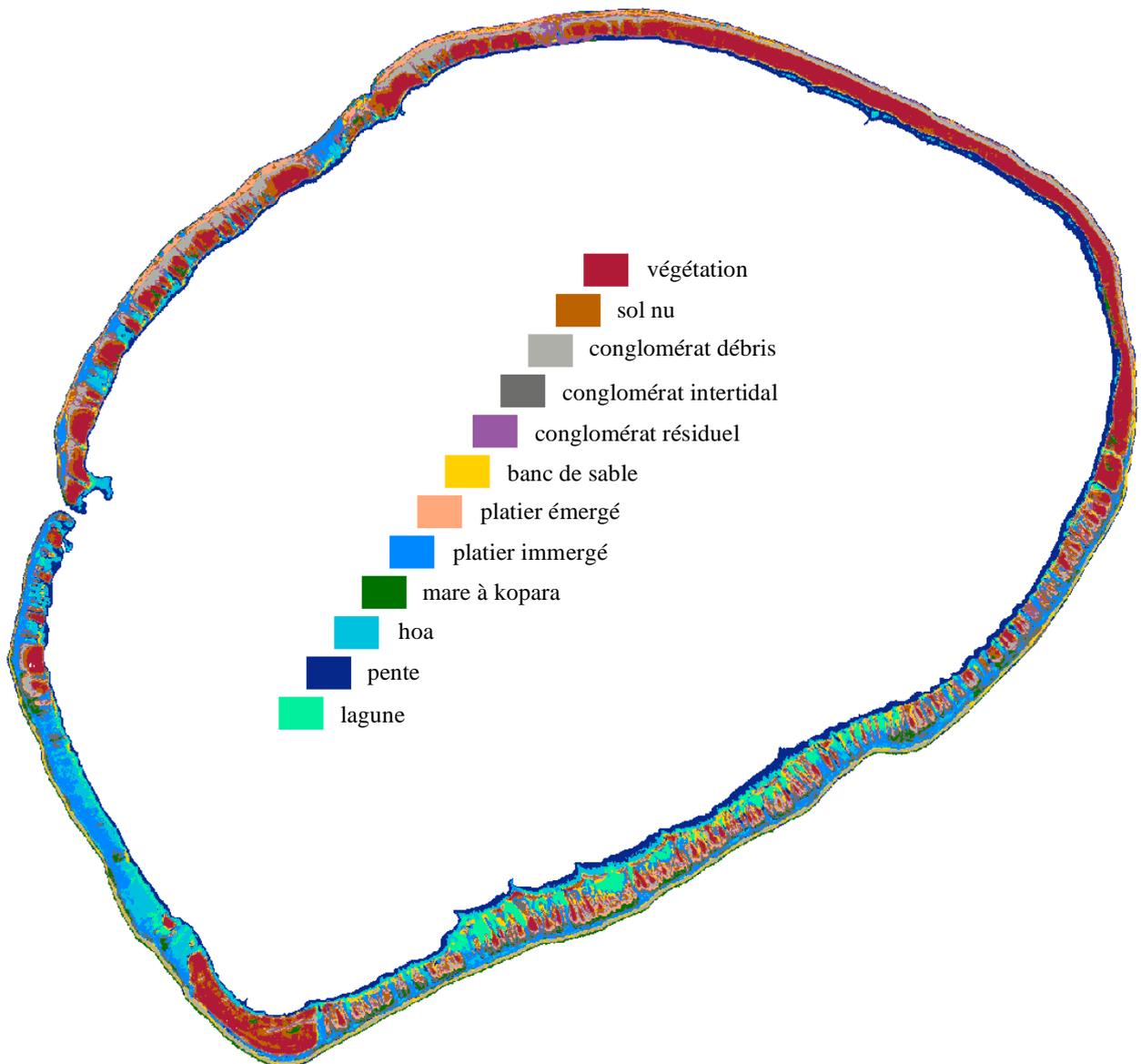


table 7. Classification PGK.

confusions présumées (tous critères)

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

confusions présumées (critère spectral uniquement)

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 9 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

table 8. *Considération d'informations binaires. Avis du photo-interprète.*

confusions constatées

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

| | | confusion présumée (tous critères) | | total |
|---------------------|-----|---------------------------------------|-----|-------|
| | | non | oui | |
| confusion constatée | non | 113 | 19 | 132 |
| | oui | 11 | 26 | 37 |
| total | | 124 | 45 | 169 |

| | | confusion présumée (critère spectral) | | total |
|---------------------|-----|--|-----|-------|
| | | non | oui | |
| confusion constatée | non | 89 | 43 | 132 |
| | oui | 5 | 32 | 37 |
| total | | 94 | 75 | 169 |

Classification FGG.

confusions constatées

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

| | | confusion présumée (tous critères) | | total |
|---------------------|-----|---------------------------------------|-----|-------|
| | | non | oui | |
| confusion constatée | non | 111 | 21 | 132 |
| | oui | 13 | 24 | 37 |
| total | | 124 | 45 | 169 |

| | | confusion présumée (critère spectral) | | total |
|---------------------|-----|--|-----|-------|
| | | non | oui | |
| confusion constatée | non | 88 | 44 | 132 |
| | oui | 6 | 31 | 37 |
| total | | 94 | 75 | 169 |

Classification PGK.

table 9. Considération d'informations binaires. Classifications FGG et PGK.

matrice de confusion

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | total | UA (%) |
|---------|------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-------|--------|
| 1 | 241 | 33 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 274 | 87.96 |
| 2 | 29 | 131 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 164 | 79.88 |
| 3 | 0 | 0 | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 155 | 0 | 0 | 0 | 168 | 7.74 |
| 4 | 0 | 14 | 0 | 152 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | 0 | 173 | 87.86 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 185 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 185 | 100.00 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 58 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 2 | 0 | 66 | 87.88 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 49 | 0 | 9 | 0 | 0 | 2 | 0 | 64 | 76.56 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 44 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 52 | 84.62 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 14 | 0 | 0 | 3 | 0 | 19 | 73.68 |
| 10 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 142 | 0 | 0 | 0 | 154 | 92.21 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 46 | 0 | 0 | 54 | 85.19 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 3 | 0 | 86 | 0 | 94 | 91.49 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 15 | 33 | 45.45 |
| total | 270 | 178 | 23 | 177 | 189 | 67 | 49 | 44 | 36 | 307 | 51 | 93 | 16 | 1500 | |
| PA (%) | 89.26 | 73.60 | 56.52 | 85.88 | 97.88 | 86.57 | 100.00 | 100.00 | 38.89 | 46.25 | 90.20 | 92.47 | 93.75 | | |

APA : 80.87 %

Kappa : 75.79 %

Tau : 76.60 %

OA : 78.40 %

AUA : 76.96 %

matrice lissée

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | total |
|---------|---------------|---------------|--------------|---------------|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|--------------|--------------|--------------|---------|
| 1 | 239.35 | 33.00 | 0.04 | 0.28 | 0.30 | 0.11 | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.48 | 0.08 | 0.15 | 0.03 | 274.00 |
| 2 | 29.00 | 130.04 | 0.02 | 3.14 | 0.18 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 1.28 | 0.05 | 0.09 | 0.02 | 164.00 |
| 3 | 0.26 | 0.17 | 12.91 | 0.17 | 0.18 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 153.96 | 0.05 | 0.09 | 0.02 | 168.00 |
| 4 | 0.27 | 14.06 | 0.02 | 150.87 | 0.19 | 0.07 | 0.05 | 0.04 | 0.04 | 6.25 | 1.04 | 0.09 | 0.02 | 173.00 |
| 5 | 0.29 | 0.19 | 0.02 | 0.19 | 183.61 | 0.07 | 0.05 | 0.05 | 0.04 | 0.33 | 0.05 | 0.10 | 0.02 | 185.00 |
| 6 | 0.10 | 0.07 | 0.01 | 0.07 | 0.07 | 57.53 | 0.02 | 0.02 | 5.96 | 0.12 | 0.02 | 2.02 | 0.01 | 66.00 |
| 7 | 0.10 | 0.07 | 0.01 | 0.07 | 4.04 | 0.02 | 48.60 | 0.02 | 8.94 | 0.11 | 0.02 | 2.02 | 0.01 | 64.00 |
| 8 | 0.08 | 0.05 | 0.01 | 0.05 | 0.06 | 6.96 | 0.01 | 43.63 | 0.01 | 0.09 | 0.02 | 0.03 | 1.00 | 52.00 |
| 9 | 0.03 | 0.02 | 0.00 | 0.02 | 0.02 | 1.99 | 0.01 | 0.00 | 13.88 | 0.03 | 0.01 | 2.98 | 0.00 | 19.00 |
| 10 | 0.24 | 0.16 | 9.93 | 0.16 | 0.17 | 0.06 | 0.04 | 0.04 | 2.01 | 141.05 | 0.05 | 0.08 | 0.01 | 154.00 |
| 11 | 0.08 | 0.06 | 0.01 | 7.99 | 0.06 | 0.02 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.10 | 45.62 | 0.03 | 0.00 | 54.00 |
| 12 | 0.15 | 0.10 | 0.01 | 0.10 | 0.10 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 4.98 | 3.14 | 0.03 | 85.31 | 0.01 | 94.00 |
| 13 | 0.05 | 0.03 | 0.00 | 13.91 | 0.04 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.06 | 3.98 | 0.02 | 14.87 | 33.00 |
| total | 270.00 | 178.00 | 23.00 | 177.00 | 189.00 | 67.00 | 49.00 | 44.00 | 36.00 | 307.00 | 51.00 | 93.00 | 16.00 | 1500.00 |

matrice normalisée (la normalisation a nécessité 202 itérations)

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | total |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------|
| 1 | 84.02 | 13.53 | 0.13 | 0.15 | 0.16 | 0.08 | 0.48 | 0.68 | 0.04 | 0.13 | 0.14 | 0.07 | 0.39 | 100.00 |
| 2 | 15.23 | 79.76 | 0.12 | 2.55 | 0.15 | 0.07 | 0.43 | 0.61 | 0.04 | 0.52 | 0.13 | 0.06 | 0.35 | 100.00 |
| 3 | 0.10 | 0.08 | 52.28 | 0.10 | 0.11 | 0.05 | 0.33 | 0.46 | 0.03 | 46.05 | 0.10 | 0.04 | 0.26 | 100.00 |
| 4 | 0.10 | 6.23 | 0.09 | 88.49 | 0.11 | 0.05 | 0.33 | 0.46 | 0.03 | 1.82 | 1.98 | 0.04 | 0.26 | 100.00 |
| 5 | 0.10 | 0.08 | 0.09 | 0.10 | 98.31 | 0.05 | 0.32 | 0.45 | 0.03 | 0.09 | 0.09 | 0.04 | 0.26 | 100.00 |
| 6 | 0.07 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.08 | 87.54 | 0.24 | 0.34 | 9.31 | 0.07 | 0.07 | 1.88 | 0.19 | 100.00 |
| 7 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.70 | 0.01 | 96.73 | 0.05 | 2.13 | 0.01 | 0.01 | 0.29 | 0.03 | 100.00 |
| 8 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 1.13 | 0.02 | 95.37 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 3.43 | 100.00 |
| 9 | 0.08 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.08 | 10.87 | 0.25 | 0.35 | 77.84 | 0.07 | 0.07 | 9.97 | 0.20 | 100.00 |
| 10 | 0.11 | 0.08 | 47.00 | 0.11 | 0.12 | 0.06 | 0.35 | 0.50 | 1.96 | 49.28 | 0.10 | 0.05 | 0.28 | 100.00 |
| 11 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 5.11 | 0.04 | 0.02 | 0.11 | 0.16 | 0.01 | 0.03 | 94.33 | 0.02 | 0.09 | 100.00 |
| 12 | 0.12 | 0.09 | 0.10 | 0.12 | 0.13 | 0.06 | 0.38 | 0.53 | 8.57 | 1.94 | 0.11 | 87.54 | 0.31 | 100.00 |
| 13 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 3.09 | 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.03 | 0.00 | 0.01 | 2.86 | 0.00 | 93.95 | 100.00 |
| total | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 1300.00 |

NOA : 83.50 %

table 10. Considération d'informations qualitatives. Classification FGG.

matrice de confusion

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | total | UA (%) |
|---------|------------|-----------|----------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|----------|-----------|-----------|-------|--------|
| 1 | 242 | 42 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 284 | 85.21 |
| 2 | 21 | 97 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 120 | 80.83 |
| 3 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 49 | 0 | 0 | 0 | 57 | 14.04 |
| 4 | 0 | 19 | 0 | 112 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 137 | 81.75 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 182 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 182 | 100.00 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 43 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 46 | 93.48 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 47 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 61 | 77.05 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 43 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 45 | 95.56 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 2 | 0 | 23 | 65.22 |
| 10 | 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 248 | 0 | 0 | 0 | 263 | 94.30 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | 100.00 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 11 | 3 | 0 | 87 | 0 | 103 | 84.47 |
| 13 | 7 | 20 | 0 | 64 | 0 | 16 | 0 | 1 | 0 | 0 | 47 | 4 | 16 | 175 | 9.14 |
| total | 270 | 178 | 23 | 177 | 189 | 67 | 49 | 44 | 36 | 307 | 51 | 93 | 16 | 1500 | |
| PA (%) | 89.63 | 54.49 | 34.78 | 63.28 | 96.30 | 64.18 | 95.92 | 97.73 | 41.67 | 80.78 | 7.84 | 93.55 | 100.00 | | |

APA : 70.78 %

Kappa : 73.16 %

Tau : 74.29 %

OA : 76.27 %

AUA : 75.46 %

matrice lissée

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | total |
|---------|---------------|--------------|-------------|---------------|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|-------------|--------------|--------------|---------|
| 1 | 240.36 | 41.93 | 0.04 | 0.29 | 0.31 | 0.11 | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.50 | 0.08 | 0.15 | 0.03 | 284.00 |
| 2 | 21.01 | 96.29 | 0.02 | 1.11 | 0.13 | 0.05 | 0.03 | 0.03 | 0.02 | 1.20 | 0.04 | 0.06 | 0.01 | 120.00 |
| 3 | 0.09 | 0.06 | 7.94 | 0.06 | 0.06 | 0.02 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 48.68 | 0.02 | 0.03 | 0.01 | 57.00 |
| 4 | 0.21 | 18.98 | 0.02 | 111.17 | 0.15 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.03 | 6.19 | 0.04 | 0.07 | 0.01 | 137.00 |
| 5 | 0.28 | 0.19 | 0.02 | 0.19 | 180.63 | 0.07 | 0.05 | 0.05 | 0.04 | 0.32 | 0.05 | 0.10 | 0.02 | 182.00 |
| 6 | 0.07 | 0.05 | 0.01 | 0.05 | 0.05 | 42.65 | 0.01 | 0.01 | 2.98 | 0.08 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 46.00 |
| 7 | 0.09 | 0.06 | 0.01 | 0.06 | 7.01 | 0.02 | 46.61 | 0.02 | 6.95 | 0.11 | 0.02 | 0.03 | 0.01 | 61.00 |
| 8 | 0.07 | 0.05 | 0.01 | 0.05 | 0.05 | 2.00 | 0.01 | 42.64 | 0.01 | 0.08 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 45.00 |
| 9 | 0.04 | 0.02 | 0.00 | 0.02 | 0.02 | 5.96 | 0.01 | 0.01 | 14.88 | 0.04 | 0.01 | 2.00 | 0.00 | 23.00 |
| 10 | 0.41 | 0.27 | 14.91 | 0.27 | 0.29 | 0.10 | 0.07 | 0.07 | 0.05 | 246.33 | 0.08 | 0.14 | 0.02 | 263.00 |
| 11 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 3.97 | 0.00 | 0.00 | 4.00 |
| 12 | 0.16 | 0.11 | 0.01 | 0.10 | 0.11 | 0.04 | 2.01 | 0.03 | 10.93 | 3.16 | 0.03 | 86.31 | 0.01 | 103.00 |
| 13 | 7.21 | 20.01 | 0.02 | 63.63 | 0.19 | 15.93 | 0.05 | 1.04 | 0.04 | 0.31 | 46.65 | 4.06 | 15.88 | 175.00 |
| total | 270.00 | 178.00 | 23.00 | 177.00 | 189.00 | 67.00 | 49.00 | 44.00 | 36.00 | 307.00 | 51.00 | 93.00 | 16.00 | 1500.00 |

matrice normalisée (la normalisation a nécessité 277 itérations)

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | total |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------|
| 1 | 82.38 | 14.68 | 0.11 | 0.25 | 0.13 | 0.06 | 0.28 | 0.17 | 0.07 | 0.14 | 0.04 | 0.22 | 1.48 | 100.00 |
| 2 | 16.63 | 77.90 | 0.10 | 2.23 | 0.13 | 0.05 | 0.27 | 0.17 | 0.06 | 0.76 | 0.04 | 0.21 | 1.45 | 100.00 |
| 3 | 0.08 | 0.06 | 61.80 | 0.14 | 0.07 | 0.03 | 0.15 | 0.10 | 0.04 | 36.57 | 0.02 | 0.12 | 0.82 | 100.00 |
| 4 | 0.07 | 6.27 | 0.05 | 90.91 | 0.06 | 0.03 | 0.13 | 0.08 | 0.03 | 1.59 | 0.02 | 0.10 | 0.68 | 100.00 |
| 5 | 0.12 | 0.08 | 0.09 | 0.20 | 97.50 | 0.05 | 0.23 | 0.14 | 0.05 | 0.11 | 0.03 | 0.18 | 1.21 | 100.00 |
| 6 | 0.10 | 0.06 | 0.07 | 0.16 | 0.08 | 84.78 | 0.18 | 0.11 | 13.26 | 0.09 | 0.02 | 0.14 | 0.95 | 100.00 |
| 7 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.03 | 1.72 | 0.01 | 93.39 | 0.02 | 4.55 | 0.02 | 0.00 | 0.03 | 0.18 | 100.00 |
| 8 | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.04 | 0.02 | 0.97 | 0.04 | 98.58 | 0.01 | 0.02 | 0.01 | 0.03 | 0.23 | 100.00 |
| 9 | 0.05 | 0.04 | 0.04 | 0.09 | 0.05 | 13.13 | 0.10 | 0.06 | 73.32 | 0.05 | 0.01 | 12.54 | 0.52 | 100.00 |
| 10 | 0.12 | 0.08 | 37.60 | 0.21 | 0.11 | 0.05 | 0.23 | 0.14 | 0.05 | 59.96 | 0.03 | 0.18 | 1.23 | 100.00 |
| 11 | 0.11 | 0.08 | 0.08 | 0.19 | 0.10 | 0.04 | 0.21 | 0.13 | 0.05 | 0.10 | 97.63 | 0.16 | 1.12 | 100.00 |
| 12 | 0.04 | 0.03 | 0.03 | 0.06 | 0.03 | 0.01 | 4.79 | 0.04 | 8.49 | 0.59 | 0.01 | 85.51 | 0.37 | 100.00 |
| 13 | 0.25 | 0.70 | 0.01 | 5.49 | 0.01 | 0.80 | 0.02 | 0.25 | 0.00 | 0.01 | 2.14 | 0.58 | 89.76 | 100.00 |
| total | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 1300.00 |

NOA : 84.11 %

table 11. Considération d'informations qualitatives. Classification PGK.

| % | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | moyenne |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| rang 1 | 89.26 | 73.60 | 56.52 | 85.88 | 97.88 | 86.57 | 100.00 | 100.00 | 38.89 | 46.25 | 90.20 | 92.47 | 93.75 | 80.87 |
| rang 2 | 10.74 | 26.40 | 43.48 | 11.30 | 2.12 | 10.45 | | | 30.56 | 50.81 | 1.96 | 4.30 | 6.25 | 15.26 |
| rang 3 | | | | 2.82 | | 1.50 | | | 16.67 | 1.63 | 3.92 | 3.23 | | 2.29 |
| rang 4 | | | | | | 0.00 | | | 8.33 | 0.00 | 0.00 | | | 0.64 |
| rang 5 à rang 13 | | | | | | 1.50 | | | 5.56 | 1.30 | 3.92 | | | 0.94 |

Classification FGG.

| % | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | moyenne |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|
| rang 1 | 89.63 | 54.49 | 34.78 | 63.28 | 96.30 | 64.18 | 95.92 | 97.73 | 41.67 | 80.78 | 7.84 | 93.55 | 100.00 | 70.78 |
| rang 2 | 9.26 | 45.51 | 56.52 | 33.33 | 3.70 | 17.91 | 4.08 | 2.27 | 27.78 | 16.61 | 84.31 | 4.30 | | 23.51 |
| rang 3 | 1.11 | | 8.70 | 3.39 | | 17.91 | | | 19.44 | 1.63 | 7.84 | 2.15 | | 4.78 |
| rang 4 | | | | | | | | | 11.11 | 0.00 | | | | 0.85 |
| rang 5 à rang 13 | | | | | | | | | | 0.98 | | | | 0.08 |

Classification PGK.

table 12. *Considération d'informations ordinales.*

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | moyenne |
|--------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|
| niv0 | % | 89.26 | 73.60 | 56.52 | 85.88 | 97.88 | 86.57 | 100.00 | 100.00 | 38.89 | 46.25 | 90.20 | 92.47 | 93.75 | 80.87 |
| | plaus. | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | >0.99 | 1.00 | 1.00 |
| | sépar. | 0.55 | 0.42 | 0.28 | 0.63 | 0.94 | 0.43 | 0.52 | 0.98 | 0.39 | 0.47 | 0.49 | 0.34 | 0.90 | 0.56 |
| niv1 | % | 10.74 | 26.40 | 43.48 | 11.30 | 2.12 | 10.45 | | | 30.56 | 50.81 | 1.96 | 4.30 | 6.25 | 15.26 |
| | plaus. | 0.82 | 0.82 | 0.63 | 0.82 | 0.76 | 0.79 | | | 0.74 | 0.77 | 0.22 | 0.92 | 0.47 | 0.71 |
| | sépar. | 0.18 | 0.18 | 0.37 | 0.18 | 0.24 | 0.21 | | | 0.26 | 0.23 | 0.78 | 0.07 | 0.53 | 0.29 |
| niv2 | % | | | | 2.82 | | 1.50 | | | 16.67 | 1.63 | 3.92 | 3.23 | | 2.29 |
| | plaus. | | | | 0.37 | | 0.36 | | | 0.39 | 0.57 | 0.66 | 0.52 | | 0.48 |
| | sépar. | | | | 0.63 | | 0.64 | | | 0.61 | 0.43 | 0.34 | 0.47 | | 0.52 |
| niv3 | % | | | | | | 0.00 | | | 8.33 | 0.00 | 0.00 | | | 0.64 |
| | plaus. | | | | | | - | | | 0.26 | - | - | | | 0.26 |
| | sépar. | | | | | | - | | | 0.74 | - | - | | | 0.74 |
| niv4 à niv12 | % | | | | | | 1.50 | | | 5.56 | 1.30 | 3.92 | | | 0.94 |
| | plaus. | | | | | | 0.00 | | | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | | 0.00 |
| | sépar. | | | | | | 1.00 | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | 1.00 |

Classification FGG.

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | moyenne |
|--------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------------|
| niv0 | % | 89.63 | 54.49 | 34.78 | 63.28 | 96.30 | 64.18 | 95.92 | 97.73 | 41.67 | 80.78 | 7.84 | 93.55 | 100.00 | 70.78 |
| | plaus. | 0.94 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.77 | 0.87 | 0.99 | 0.98 | 0.95 | 0.96 | >0.99 | 0.96 | 0.85 | 0.94 |
| | sépar. | 0.33 | 0.10 | 0.01 | 0.26 | 0.67 | 0.11 | 0.18 | 0.45 | 0.25 | 0.23 | <0.01 | 0.22 | 0.72 | 0.27 |
| niv1 | % | 9.26 | 45.51 | 56.52 | 33.33 | 3.70 | 17.91 | 4.08 | 2.27 | 27.78 | 16.61 | 84.31 | 4.30 | | 23.51 |
| | plaus. | 0.85 | 0.89 | 0.65 | 0.76 | 0.18 | 0.62 | 0.99 | 0.57 | 0.90 | 0.97 | 0.76 | 0.56 | | 0.73 |
| | sépar. | 0.07 | 0.08 | 0.25 | 0.19 | 0.08 | 0.08 | <0.01 | 0.19 | 0.09 | 0.01 | 0.22 | 0.07 | | 0.11 |
| niv2 | % | 1.11 | | 8.70 | 3.39 | | 17.91 | | | 19.44 | 1.63 | 7.84 | 2.15 | | 4.78 |
| | plaus. | 0.77 | | 0.26 | 0.67 | | 0.33 | | | 0.61 | 0.45 | 0.25 | 0.92 | | 0.53 |
| | sépar. | 0.14 | | 0.36 | 0.32 | | 0.32 | | | 0.37 | 0.30 | 0.73 | 0.08 | | 0.33 |
| niv3 | % | | | | | | | | | 11.11 | 0.00 | | | | 0.85 |
| | plaus. | | | | | | | | | 0.38 | - | | | | 0.38 |
| | sépar. | | | | | | | | | 0.53 | - | | | | 0.53 |
| niv4 à niv12 | % | | | | | | | | | | 0.98 | | | | 0.08 |
| | plaus. | | | | | | | | | | 0.09 | | | | 0.09 |
| | sépar. | | | | | | | | | | 0.83 | | | | 0.83 |

Classification PGK.

table 13. Considération d'informations ordinales (lignes grises) et quantitatives.

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|-----|-----|----|-----|-----|----|----|----|----|-----|----|----|----|
| | 270 | 178 | 23 | 177 | 189 | 67 | 49 | 44 | 36 | 307 | 51 | 93 | 16 |

Effectifs des parcelles de contrôle.

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|---------------|---------------|--------------|---------------|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 264.66 | 85.99 | 1.00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 11.31 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 132.97 | 169.62 | 0 | 26.06 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15.04 | 0.22 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 19.26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 202.23 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 3.36 | 32.83 | 0 | 170.29 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 31.53 | 5.12 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 188.02 | 0 | 1.15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 63.88 | 0 | 0 | 9.62 | 0 | 0 | 11.79 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 14.31 | 0 | 49.00 | 0 | 14.53 | 0 | 0 | 33.18 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 14.24 | 0 | 44.00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.00 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 32.28 | 13.50 | 0 | 25.24 | 1.39 | 0 | 52.30 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 19.41 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2.62 | 264.63 | 0 | 8.86 | 0 |
| 11 | 0 | 3.32 | 0 | 14.32 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 47.53 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0.28 | 0 | 0 | 0 | 23.25 | 0 | 19.93 | 14.18 | 0 | 91.09 | 1.50 |
| 13 | 11.51 | 22.71 | 0 | 56.26 | 0 | 7.33 | 0 | 0.80 | 0 | 0 | 28.22 | 4.42 | 15.47 |

a) Matrice de plausibilité.

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|---------------|--------------|-------------|--------------|---------------|--------------|--------------|--------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 133.38 | 6.08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 5.34 | 55.51 | 0 | 0.41 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.10 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 3.59 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35.97 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 2.30 | 0 | 95.81 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.04 | 0.07 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 174.69 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25.12 | 0 | 0 | 1.58 | 0 | 0 | 0.56 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.98 | 0 | 25.47 | 0 | 3.26 | 0 | 0 | 0.13 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2.83 | 0 | 43.20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.53 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.28 | 0 | 0 | 5.46 | 0 | 0 | 0.30 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 3.74 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.07 | 66.34 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 3.31 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 22.70 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.28 | 1.28 | 0 | 29.34 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 2.71 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.08 | 0 | 13.50 |

b) Matrice de crédibilité.

table 14. Matrice de plausibilité et matrice de crédibilité. Classification FGG.

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|-----|-----|----|-----|-----|----|----|----|----|-----|----|----|----|
| | 270 | 178 | 23 | 177 | 189 | 67 | 49 | 44 | 36 | 307 | 51 | 93 | 16 |

Effectifs des parcelles de contrôle.

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|---------------|---------------|--------------|---------------|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 250.95 | 115.15 | 4.83 | 11.91 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 54.24 | 1.37 | 0 | 0 |
| 2 | 157.69 | 167.19 | 0.94 | 46.48 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 26.44 | 4.59 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 16.85 | 0 | 0 | 0 | 1.12 | 0 | 0.58 | 204.13 | 0 | 1.72 | 0 |
| 4 | 14.87 | 48.39 | 4.14 | 158.68 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 68.70 | 14.53 | 0 | 0.06 |
| 5 | 0 | 0 | 0.14 | 0 | 141.85 | 0 | 4.66 | 0 | 0.37 | 4.19 | 0 | 0.03 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 48.33 | 2.86 | 0.62 | 10.34 | 0.22 | 0 | 14.09 | 0.01 |
| 7 | 0.09 | 0.06 | 0.47 | 0.73 | 20.73 | 2.12 | 48.34 | 0 | 18.20 | 10.09 | 0 | 44.37 | 0.44 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 16.35 | 0.75 | 42.55 | 1.36 | 0 | 0 | 1.27 | 0.66 |
| 9 | 0.97 | 0.17 | 0.83 | 0.60 | 0.02 | 41.79 | 23.18 | 0.51 | 28.99 | 17.78 | 0 | 62.07 | 0.43 |
| 10 | 0.99 | 1.70 | 20.72 | 9.46 | 0.71 | 0.94 | 8.31 | 0 | 5.97 | 291.14 | 0.06 | 23.02 | 0.33 |
| 11 | 3.47 | 16.00 | 0 | 18.55 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.03 | 37.74 | 0 | 0 |
| 12 | 1.60 | 0.98 | 3.33 | 6.05 | 9.31 | 13.40 | 39.85 | 0.51 | 27.39 | 72.64 | 0.07 | 87.74 | 1.52 |
| 13 | 127.78 | 134.32 | 1.07 | 135.62 | 4.48 | 34.28 | 5.01 | 23.56 | 7.98 | 19.50 | 50.02 | 18.45 | 13.61 |

a) Matrice de plausibilité.

| classes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|--------------|-------------|-------------|--------------|---------------|-------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|--------------|
| 1 | 80.00 | 3.27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1.45 | 9.14 | 0 | 0.01 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0.07 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1.37 | 0 | 28.92 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.81 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 121.68 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4.35 | 0 | 0 | 0.19 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.58 | 0 | 8.50 | 0 | 0.74 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.28 | 0 | 19.18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.41 | 0 | 0 | 3.73 | 0 | 0 | 0.01 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 3.95 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 55.98 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.01 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.01 | 0 | 0.89 | 0.99 | 0 | 19.39 | 0 |
| 13 | 0.51 | 1.96 | 0 | 11.89 | 0 | 1.88 | 0 | 0.19 | 0 | 0 | 10.79 | 0.28 | 11.47 |

b) Matrice de crédibilité.

table 15. Matrice de plausibilité et matrice de crédibilité. Classification PGK.

| couche de niveau | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|------------------------|-------|------|--------|-------|-------|---|---|---|---|---|----|----|----|
| degré d'imbrication | 0.10% | 100% | 25.29% | 4.44% | 0.04% | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Degré global d'imbrication : 11.94%

Classification FGG.

| couche de niveau | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|------------------------|--------|------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|----|----|----|
| degré d'imbrication | 37.92% | 100% | 57.63% | 23.50% | 11.26% | 5.02% | 2.46% | 1.06% | 0.52% | 0.12% | 0 | 0 | 0 |

Degré global d'imbrication : 47.55%

Classification PGK.

table 16. *Imbrications.*

CONCLUSION

Nos travaux concernent l'exploitation de connaissances d'experts et de données exogènes pour l'interprétation d'images numériques. Plus précisément, notre thème de recherche est l'amélioration de la classification d'images satellites par la prise en compte de connaissances structurales. Ces dernières peuvent faire appel à quantité de propriétés et relations. Un spécialiste en milieu d'atolls énoncera par exemple que « la classe conglomérat/débris se présente souvent sous la forme de régions trapézoïdales » (propriété géométrique, invariante par transformation affine), qu' « une mare à kopara est toujours entourée de domaine terrestre » (relation spatiale binaire topologique, invariante par homéomorphisme), etc. Supposons alors qu'un objet mis en évidence dans une image — par un moyen ou un autre — soit pressenti pour être de la classe conglomérat/débris. L'exploitation des connaissances énoncées conduit inévitablement à la question suivante : dans quelle mesure ledit objet se présente-t-il bien sous la forme d'une région trapézoïdale ? Cette question illustre l'un des nombreux sous-problèmes qui sont rattachés à notre thème de recherche. Les travaux décrits dans ce mémoire traitent essentiellement de ce sous-problème. Nous nous sommes focalisés d'autre part sur les connaissances structurales — à la fois courantes et complexes — mettant simultanément en jeu deux classes d'objets.

L'appel à la notion de distance est typique de telles connaissances. Aussi notre intérêt s'est-il naturellement porté sur les MNT matriciels : plus précisément, sur les graphes orientés qui peuvent être définis à partir de ces MNT et valués par la distance euclidienne. Mais nous nous sommes placés dans un cadre général, où il est question de coûts, non de distances. Des mesures dites de rentabilité ont été introduites. Par le biais de ces mesures, une modélisation de l'accessibilité a été présentée. Coûts et rentabilités — comme distances et accessibilités, auxquels ils peuvent correspondre — fournissent des informations riches et complémentaires. Nous avons également proposé un algorithme dédié à la recherche de chemins optimaux dans un graphe orienté, valué, associé à un MNT matriciel. Cet algorithme, dit des flux et reflux, permet un calcul croisé d'images de moindres coûts et d'images de rentabilités. Notre objectif dans le chapitre I était surtout de dégager et cristalliser les idées maîtresses d'une proposition antérieure — émise par Zehana. Nos travaux sur le sujet sont loin d'être achevés. En particulier, l'examen de mesures de rentabilité autres que les rentabilités 2D nous semble prometteur, et nous comptons bien le poursuivre. Nous avons vu d'autre part que le choix de la fonction économique et la géographie du lieu modélisé par le MNT jouent sur les performances de l'algorithme des flux et reflux. Il est évidemment nécessaire d'entreprendre sur ce point une étude expérimentale poussée.

Parmi les connaissances structurales qui mettent simultanément en jeu deux classes d'objets, celles faisant intervenir la notion de position relative sont tout aussi typiques. La position relative d'objets bidimensionnels est habituellement représentée par un histogramme d'angles. Un nouveau mode de représentation, qui généralise et supprime le précédent, a été développé. Il repose sur la notion de F-histogramme (ou histogramme de forces). La construction d'un tel histogramme est réalisée en ramenant la manipulation des objets non pas à celle de points mais à celle de sections longitudinales (entités de dimension 1). Il est ainsi possible de bénéficier de la puissance du calcul intégral et d'assurer un traitement rapide aussi bien de données "rasters" que de données vecteurs, d'objets flous que d'objets nets, tout en tenant compte explicitement aussi bien de l'information angulaire que de l'information métrique. Cette dernière caractéristique est la caractéristique majeure du concept de F-histogramme, qui offre ainsi un puissant moyen de représentation, aux nombreuses applications potentielles. En particulier, les histogrammes de forces se prêtent avec une grande souplesse à la génération de relations direction-

nelles : ils permettent non seulement de redéfinir avantageusement des familles existantes de relations, mais aussi de définir des familles foncièrement nouvelles. Nous avons montré enfin que le concept de F-histogramme est à la fois ouvert et flexible. Il constitue une réelle plateforme d'exploration dans le domaine de la représentation de positions relatives.

Les connaissances structurelles faisant intervenir la notion de distance ou de position relative sont parmi les plus courantes à mettre simultanément en jeu deux classes d'objets. Mais ce ne sont pas les seules. Notons d'autre part que certaines connaissances peuvent mettre en jeu trois classes d'objets. Ainsi, « une mare à kopara se situe rarement entre un motu et un rempart de blocs ». En définitive, si le principal problème abordé dans ce mémoire est celui de l'adéquation entre objets et connaissances, il peut encore faire l'objet de nombreuses thèses. Il nous semblait intéressant malgré tout de conclure le mémoire par un chapitre offrant sur le thème général de nos recherches un regard totalement différent. Supposons que nous sachions évaluer l'adéquation entre objets et connaissances. Comment utiliser cette aptitude pour mieux classer une image, dès lors que certaines connaissances structurelles d'experts sur les classes représentées sont disponibles ? Nous l'avons dit, il s'agit de modifier une partition floue issue d'une pré-classification.

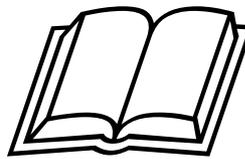
Très concrètement, cette pré-classification est assurée par un démonstrateur expérimental que nous avons développé sur la plate-forme d'accueil logiciel *MAPSAT* (*MAPSAT* est un produit distribué par la société CRIL *Ingenierie*). Au moyen de ce démonstrateur, il est possible de spécifier des sources d'informations radiométriques (comme les classifieurs FGG et PGK). Il est également possible de spécifier des sources d'informations symboliques. Une telle source est le résultat de la compilation d'une base de connaissances ponctuelles. Ces connaissances, éventuellement incertaines et/ou imprécises, sont saisies au moyen d'un éditeur spécialisé interfacé avec *MAPSAT*, sous la forme de règles dont le formalisme est emprunté à la logique floue. La liste des attributs disponibles (altitude, pente, orientation, distance au réseau hydrographique...) est paramétrable. Les caractéristiques de ces attributs (valeur minimale autorisée, valeur maximale, périodicité...) également. Les sources spécifiées permettent la production de partitions floues. Diverses techniques de fusion d'informations multisources peuvent ensuite être testées par l'utilisateur-expérimentateur. Ce démonstrateur a largement bénéficié du fruit des recherches effectuées ces dernières années dans l'équipe de traitement et compréhension d'images de l'IRIT. Un rapport technique le concernant est en cours de rédaction.

La prise en compte de connaissances structurelles dans le processus de classification se traduit donc par la modification d'une partition floue. Dans le chapitre III, nous avons montré la pertinence de ce principe. À l'origine, la question était surtout de savoir si certaines partitions se prêtent mieux que d'autres, de par leur nature, au type de manipulation évoqué. Nous nous sommes donc penchés sur le problème de l'évaluation et de la comparaison de partitions en classification d'images. D'un point de vue très général, il s'agit en fait de mesurer la dépendance de deux variables — qu'elles soient binaires, qualitatives, ordinales ou quantitatives. Nous nous sommes essentiellement attachés à décrire le matériau sur lequel, suivant la nature des variables considérées, doit ou peut s'appuyer la comparaison de deux partitions. En particulier, nous avons proposé de comparer deux partitions floues — sujet rarement abordé dans la littérature — par l'intermédiaire de ce que nous avons appelé leurs fermetures plausibilistes. La façon d'exploiter ce matériau est loin d'être évidente. On ne peut guère s'en étonner, connaissant tous les problèmes que soulèvent, dans le cas de partitions nettes, l'analyse d'une « simple »

matrice de confusion. L'étude réalisée dans le chapitre III ne permet finalement pas de répondre à la question posée initialement : savoir si certaines partitions se prêtent mieux que d'autres au processus d'intégration des connaissances structurelles. Elle constitue néanmoins une première réflexion sur un sujet complexe et pose le germe de recherches futures.

Nous ne saurions clore ce mémoire sans dire quelques mots sur la façon dont nous envisageons, au stade actuel de nos travaux, l'intégration même des connaissances structurelles. Considérons donc la partition floue issue d'une pré-classification (sans chercher à savoir si d'autres conviendraient mieux). Sur chaque région de la partition nette obtenue par "défuzzification" de la partition floue, se posent naturellement les questions suivantes : dans quelle mesure la région est-elle en adéquation avec les connaissances structurelles la concernant ? quelle confiance peut-on accorder à cette région, au vu — dans la partition floue — des degrés d'appartenance aux différentes classes ? On est ainsi amené à attribuer à chaque région un degré de « remise en question ». Une première modification de la partition floue initiale est ensuite entreprise : c'est une modification locale, guidée par la région nette possédant le plus fort degré de remise en question. Elle ne touche d'autre part que les couches de niveau 0 et 1. Puis le processus est réitéré. D'une itération à l'autre, la plupart des régions nettes restent inchangées : seul le degré de remise en question de quelques régions est donc réévalué. Le processus se termine lorsque les degrés de remise en question obtenus sont satisfaisants, ou lorsqu'une stabilisation de ces degrés est constatée, ou encore lorsqu'un nombre prédéterminé d'itérations est atteint.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES



- Ahuj93** R.K.Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin, *Network flows*, Prentice Hall, 1993.
- Alle83** J.F.Allen, « Maintaining knowledge about temporal intervals », *Communications of the ACM*, 26(11), pp.832-843, 1983.
- Andr97** S.Andréfouët, L.Roux, Y.Chancerelle, A.Bonneville, « A fuzzy possibilistic scheme of study for objects with indeterminate boundaries: application to french polynesian reefs », *IEEE Trans. Geosciences & Remote Sensing* (accepted).
- Anis97** K.Anisimovich, V.Rybkin, A.Shamis, V.Tereshchenko, « Classifiers for recognition of handprinted characters », *Proc. of the Fourth Intern. Conf. on Document Analysis and Recognition*, vol.2, pp.881-885, 1997.
- Asch92** P.Aschwanden, W.Guggenbül, « Experimental results from a comparative study on correlation-type registration algorithms », dans *Robust computer vision*, Förstner et Ruwiedel éditeurs, pp.268-282, 1992.
- Batt75** R.Battistini, F.Bourrouilh, J.P.Chevalier, J.Coudray, M.Denizot, G.Faure, J.C.Fischer, A.Guilcher, M.Harmelin-Vivien, J.Jaubert, J.Laborel, J.P.Masse, L.A.Maugé, L.Montaggioni, M.Peyrot-Clausade, M.Pichon, R.Plante, J.C.Plaziat, Y.B.Plessis, G.Richard, B.Salvat, B.A.Thomassin, P.Vasseur, P.Weydert, *Éléments de terminologie récifale indopacifique*, périodique de la Station Marine d'Endoume, *Thétys*, vol.7, no.1, 1975.
- Bell58** R.Bellman, « On a toutin problem », *Quarterly of Applied Mathematics* 16(1), pp.87-90, 1958.
- Bez81** J.C.Bezdek, *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*, Plenum Press, New York, 1981.
- Bez92** J.C.Bezdek, S.K.Pal, *Fuzzy Models for Pattern Recognition*, IEEE Press, New York, 1992.
- Bloc94** I.Bloch, « Information combination operators for data fusion : a comparative review with classification », *SPIE*, vol.2315, pp.148-159, 1994.
- Bloc96a** I.Bloch, « Fuzzy Relative Position Between Objects in Images: A Morphological Approach », *ICIP'96*, Lausanne, Switzerland, 1996.
- Bloc96b** I.Bloch, « Fuzzy Spatial Relationships: A Few Tools for Model-based Pattern Recognition in Aerial Images », *Proc. SPIE, Image and Signal Processing for Remote Sensing III*, vol.2955, pp.141-152, 1996.
- Borg84** G.Borgefors, « Distance transformations in arbitrary dimensions », *CVGIP* 27, pp.321-345, 1984.
- Borg86** G.Borgefors, « Distance transformations in digital images », *CVGIP* 34, pp.344-371, 1986.
- Bove86** J.Bovet, « Une amélioration de la méthode de Dijkstra pour la recherche d'un plus court chemin dans un réseau », *Discrete Applied Mathematics*, vol.13, pp.93-96, 1986.
- Chas91** J.M.Chassery, A.Montanvert, *Géométrie discrète en analyse d'image*, éditions Hermès, 1991.
- Chen97** J.W.Chen, S.Y.Lee, « On-line chinese character recognition via a representation of spatial relationships between strokes », *Intern. Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, vol.11, no.3, pp.329-357, 1997.
- Choq53** G.Choquet, « Theory of capacities », *Ann. Inst. Fourier*, vol.5, pp.131-295, 1953.

- Cong88** R.G.Congalton, « A Comparison of Sampling Schemes Used in Generating Error Matrices for Assessing the Accuracy of Maps Generated from Remotely Sensed Data », *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, vol.54, no.5, pp.593-600, 1988.
- Cong91** R.G.Congalton, « A review of assessing the accuracy of classification of remotely sensed data », *Remote Sensing of Environment*, vol.37, pp.35-46, 1991.
- Cove67** T.Cover, P.Hart, « Nearest Neighbour Pattern Classification », *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.13, pp.21-27, 1967.
- Dave92** R.N.Dave, « Characterization and Detection of Noise in Clustering », *Pattern Recognition Letters*, vol.12, no.11, pp.657-664, 1992.
- Deer96** P.J.Deer, « The application of fuzzy sets theory to image processing and remote sensing », *8th Australasian Remote Sensing Confer.*, Canberra, Australia, 1996.
- Desa91** J.Desachy, *Interprétation automatique d'images satellites : le système ICARE*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Toulouse III, 1991.
- Dijk59** E.W.Dijkstra, « A note on two problems in connexion with graphs », *Numerische Mathematik* 1, pp.259-261, 1959.
- Dubo80** D.Dubois, H.Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- Dubo87** D.Dubois, M.C.Jaulent, « A general approach to parameter evaluation in fuzzy digital pictures », *Pattern Recognition Letters*, vol.6, pp.251-259, 1987.
- Dubo95** N.Dubois, F. Semet, « Estimation and determination of shortest path length in a road network with obstacles », *European Journal of Operational Research* 83, pp.105-116, 1995.
- Dutt91** S.Dutta, « Approximate spatial reasoning : integrating qualitative and quantitative constraints », *International Journal of Approximate Reasoning*, vol.5, pp.307-331, 1991.
- Food92** G.M.Foody, « On the compensation for Chance Agreement in image classification accuracy assessment », *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, vol.58, no.10, pp.1459-1460, 1992.
- Food94** G.M.Foody, D.P.Cox, « Sub-pixel land-cover composition estimation using a linear mixture model and fuzzy membership functions », *Intern. Journal of Remote Sensing*, vol.15, pp.619-631, 1994.
- Food95** G.M.Foody, M.B.McCulloch, W.B.Yates, « Classification of Remotely Sensed Data by an Artificial Neural Network: Issues Related to Training Data Characteristics », *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, vol.61, no.4, pp.391-401, 1995.
- Free61** H.Freeman, « On the encoding of arbitrary geometric configurations », *Computer Methods in Image Analysis*, Aggrawal & al. ed., IEEE Press, 1977. Reprinted from *IRE Trans. Electron. Compu.* 10, pp.260-268, 1961.
- Free75** J.Freeman, « The modelling of spatial relations », *Computer Graphics and Image Processing*, vol.4, pp.156-171, 1975.
- Gade97** P.D.Gader, « Fuzzy spatial relations based on fuzzy morphology », *Proceedings of the Sixth IEEE Intern. Conf. on Fuzzy Systems*, vol.2, pp.1179-1183, 1997.
- Gath89** I.Gath, A.B.Geva, « Unsupervised Optimal Fuzzy Clustering », *IEEE Trans. on PAMI*, vol.11, no.7, pp.773-781, 1989.

- Gond84** M.Gondran, M.Minoux, *Graphs and Algorithms*, Wiley, Chichester, 1984.
- Gong90** P.Gong, P.J.Howarth, « An assessment of some factors influencing multispectral land-cover classification », *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, vol.56, pp.597-603, 1990.
- Grub88** C.Gruber, *Mécanique Générale*, Presses Polytechniques Romandes, 1988.
- Gust79** E.E.Gustafson, W.C.Kessel, « Fuzzy Clustering with a Fuzzy Covariance Matrix », *Proc. IEEE CDC*, San Diego, pp.761-766, 1979.
- Harm85** M.Harmelin-Vivien, « L'atoll de Tikehau », *ORSTOM, Tahiti, Notes et documents Océanographie* 24, 1985.
- Jain89** A.Jain, R.Dubes, *Algorithms for Clustering Data*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1989
- Kell90** J.M.Keller, L.Sztandera, « Spatial relations among fuzzy subsets of an image », *Proceedings of the First International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis*, College Park, University of Maryland, pp.207-211, 1990.
- Kell95** J.M.Keller, X.Wang, « Comparison of spatial relation definitions in computer vision », *ISUMA-NAFIPS'95*, College Park MD, pp.679-684, 1995.
- Kell96** J.M.Keller, X.Wang, « Learning spatial relationships in computer vision », *Proceedings, FUZZ-IEEE'96*, 1996.
- Kocz88** L.T.Kóczy, « On the description of relative position of fuzzy patterns », *Pattern Recognition Letters*, vol.8, pp.21-28, 1988.
- Krev94** van Kreveld, M., « On Quality Paths on Polyhedral Terrains », *IGIS'94, LNCS 884*, Springer-Verlag, pp.113-122, 1994.
- Kris93** R.Krishnapuram, J.M.Keller, Y.Ma, « Quantitative analysis of properties and spatial relations of fuzzy image regions », *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol.1, no.3, pp.222-233, 1993.
- Kris93a** R.Krishnapuram, J.M.Keller, « A Possibilistic Approach to Clustering », *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol.1, no.2, pp.98-110, 1993.
- Kris93b** R.Krishnapuram, « Fuzzy Clustering Methods in Computer Vision », *EUFIT'93*, pp.720-730, 1993.
- Kris96** R.Krishnapuram, J.M.Keller, « The possibilistic C-Means algorithm: insights and recommendations », *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol.4, pp.385-393, 1996.
- Krou97** N.H.Kroupnova, M.J.Korsten, « Object recognition algorithm based on inexact graphs matching and its application in a color vision system for recognition of electronic components on PCBs », *Proc. of the SPIE, The Intern. Society for Optical Engineering*, vol.3029, pp.37-48, 1997.
- Lee92** S.Y.Lee, F.J.Hsu, « Spatial reasoning and similarity retrieval of images using 2D C-string knowledge representation », *Pattern Recognition*, vol.25, n°3, pp.305-318, 1992.
- Lege84** L.Legendre, P.Legendre, *Ecologie numérique*, 335 pp., Masson et les Presses de l'Université du Québec, Paris, 1984.
- MaRe95** Z.Ma, R.L.Redmond, « Tau coefficients for accuracy assessment of classification of remote sensing data », *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, vol.61, pp.435-439, 1995.

- Masc96** L.Mascarilla, *Apprentissage de connaissances pour l'interprétation des images satellites*, Thèse de Doctorat, Université Toulouse III, 1996.
- Mats97** P.Matsakis, J.Gadiou, J.Desachy, « Defining Cost Functions and Profitability Measures for Digraphs Associated with Raster DEMs », *ICIAP'97, LNCS 1310*, Springer-Verlag, vol.1, pp.198-205, 1997.
- Mats98** P.Matsakis, L.Wendling, J.Desachy, « Représentation de la position relative d'objets 2D au moyen d'un histogramme de forces », *Traitement du signal*, à paraître début 1998 (vol.15, no.1).
- Megz84** O.Megzari, *Utilisation des modèles numériques de terrain MNT en télédétection*, Thèse de Doctorat, Université Toulouse III, 1984.
- Meng42** K.Menger, « Statistical metric spaces », *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol.28, pp.535-537, 1942.
- Mitc91** J.S.B.Mitchell, C.H.Papadimitriou, « The weighted region problem : finding shortest paths through a weighted planar subdivision », *Journal of ACM*, vol.38, no.11, pp.18-73, 1991.
- Miya94a** K.Miyajima, A.Ralescu, « Spatial Organization in 2D Images », *Proceedings of the Third IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Orlando, FL, pp.100-105, 1994.
- Miya94b** K.Miyajima, A.Ralescu, « Spatial organization in 2D segmented images : representation and recognition of primitive spatial relations », *Fuzzy Sets and Systems*, vol.65, iss.2/3, pp.225-236, 1994.
- Muro89** T.Murofushi, M.Sugeno, « An interpretation of fuzzy measures and Choquet's integral as an integral with respect to a fuzzy measure », *Fuzzy Sets and Systems*, vol.29, pp.201-227, 1989.
- Muro91** T.Murofushi, M.Sugeno, « Fuzzy t-conorm integral with respect to fuzzy measures: Generalization of Sugeno integral and Choquet integral », *Fuzzy Sets and Systems*, vol.42, pp.57-71, 1991.
- PalB95** N.R.Pal, J.C.Bezdek, « On Cluster Validity for the Fuzzy C-Means Model », *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol.3, no.3, 1995.
- Peuq87** D.J.Peuquet, Z.Ci-Xiang, « An algorithm to determine the directional relationship between arbitrarily-shaped polygons in the plane », *Pattern Recognition*, vol.20, no.1, pp.65-74, 1987.
- Pouj94** V.Poujade, *Reconnaissance des formes en télédétection, application à la cartographie planimétrique*, Thèse de Doctorat, Université Paris VII, 1994.
- Prew70** J.M.Prewitt, « Object enhancement and extraction », *Picture Processing and Psychopictorics*, Academic Press, pp.75-149, 1970.
- Prin94** C.Prins, *Algorithmes de graphes*, Eyrolles, 1994.
- Retz88** G.Retz-Schmidt, « Various Views on Spatial Prepositions », *AI Magazine*, vol.9, no.2, pp.95-105, 1988.
- Roge88** D.F.Rogers, *Algorithmes pour l'infographie*, McGraw-Hill, Paris, 1988.
- Rose66** A.Rosenfeld, J.L.Pfaltz, « Sequential operations in digital picture processing », *Journal of ACM*, vol.13, no.4, pp.471-494, 1966.
- Rose70** A.Rosenfeld, « Connectivity in digital pictures », *Journal of ACM*, vol.17, no.1, pp.146-160, 1970.

- Rose82** A.Rosenfeld, A.C.Kak, *Digital picture processing*, vol.2, Academic Press, pp.263-264, 1982.
- Rose85** A.Rosenfeld, R.Klette, « Degree of adjacency or surroundedness », *Pattern Recognition*, vol.18, no.2, pp.169-177, 1985.
- Rusp69** E.H.Ruspini, « A New Approach to Clustering », *Inform. and Control*, vol.15, pp.22-32, 1969.
- SaJo95** D.Saint-Joan, *Données géographiques et raisonnement : le système GEODES*, Thèse de Doctorat, Université Toulouse III, 1995.
- Sand91** S.Sandri, *La combinaison de l'information incertaine et ses aspects algorithmiques*, Thèse de Doctorat, Université Toulouse III, 1991.
- Sapo90** G.Saporta, *Probabilités, analyse des données et statistiques*, 493 pp., Technip, Paris, 1990.
- Sche84** B.Scherrer, *Biostatistiques*, 850 pp., Gaetan-Morin, 1984.
- Sedg86** R.Sedgewick, J.S. Vitter, « Shortest paths in euclidean graphs », *Algorithmica* 1, pp.31-48, 1986.
- Shar95** J.Sharma, D.M.Flewelling, « Inferences from combined knowledge about topology and directions », *LNCS 951, Advances in Spatial Databases*, Springer, pp.279-291, 1995.
- Stor86** M.Story, R.G.Congalton, « Accuracy Assessment: A User's Perspective », *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, vol.52, no.3, pp.397-399, 1986.
- Suge74** M.Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.
- Toiv96** P.J.Toivanen, « New geodesic distance transforms for gray-scale images », *Pattern Recognition Letters*, vol.17, pp.437-450, 1996.
- Webe84** S.Weber, « \perp -decomposable measures and integrals for Archimedean t-conorms \perp », *J. Math. Anal. Appl.*, vol.101, pp.114-138, 1984.
- Wend97** L.Wendling, *Graphes relationnels et reconnaissance des formes : application à la détection d'objets dans les images sur la base d'exemples*, Thèse de Doctorat, Université Toulouse III, 1997.
- Wins75** P.H.Winston, *The psychology of computer vision*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- Worb95** M.F.Worboys, *GIS - A computing perspective*, Taylor & Francis, 1995.
- Yoko75** S.Yokoi, J.I.Toriwaki, T.Fukumura, « An analysis of topological properties of digitized binary pictures using local features », *CGIP* 4, pp.63-73, 1975.
- Zade65** L.A.Zadeh, « Fuzzy Sets », *Information and Control*, vol.8, pp.338-353, 1965.
- Zade75** L.Zadeh, « The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning », *Information Sciences*, Part 1, vol.8, pp.199-249; Part 2, vol.8, pp.301-357; Part 3, vol.9, pp.43-80; 1975.
- Zade78** L.A.Zadeh, « Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility », *Fuzzy Sets and Systems*, vol.1, pp.3-28, 1978.
- Zahz92** E.H.Zahzah, *Contribution à la représentation des connaissances et à leur utilisation pour l'interprétation automatique des images satellites*, Thèse de Doctorat, Université Toulouse III, 1992.

- Zeha91** M.Zehana, J.Desachy, E.H.Zahzah, « DEM features for remote sensing image analysis by an expert system: stream networks and real distance computation », *IEEE, Intern. Geoscience & Remote Sensing Symposium*, Helsinki 1991.
- Zeha92** M.Zehana, J.Desachy, E.H.Zahzah, « Fast distance computation for spatial reasoning with remote sensing images and digital elevation models », *International Meeting on Distance Analysis, DISTANCIA'92*, Rennes 1992.
- Zeha95** M.Zehana, *Connaissances structurelles et interprétation d'images satellitaires*, Thèse de Doctorat, Université Toulouse III, 1995.
- Zhan93** C.Zhan, S. Menon, P.Gao, « A Directional Path Distance Model for Raster Distance Mapping », *COSIT'93, LNCS 716*, Springer-Verlag, pp.434-443, 1993.
- Zhua95** X.Zhuang, B.A.Engel, X.Xiong, C.J.Johannsen, « Analysis of classification results of remotely sensed data and evaluation of classification algorithms », *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, vol.61, pp.427-433, 1995.
- Zimm85** H.J.Zimmerman, P.Zysno, « Quantifying Vagueness in Decision Models », *European Journal of Operational Research*, vol.22, pp.148-158, 1985.

